Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2022/2023
Mme MOREL

DS 1 – MATHÉMATIQUES

mercredi 21 septembre 2022

Durée du devoir : 3 heures

***La présentation, la lisibilité,* l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.**

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de deux exercices de cours et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Question de cours.

Rappeler et démontrer la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$, pour tout entier naturel n.

Informatique. (langage Python)

On considère la fonction définie par :

$$\forall x \geqslant 0\,,\ f(x) = \left|\begin{array}{ll} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array}\right.$$

Écrire une fonction qui prend en argument un réel positif x et qui renvoie la valeur de $f(x)$.

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$
2. $x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$
3. $\dfrac{2x-3}{x-1} < 2$
4. $\dfrac{2}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x}{2x^2 + 3x - 2} \leqslant 0$

Exercice 2.

Soient a, b deux réels positifs tels que : $b \leqslant a \leqslant 2b$. Simplifier $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$ *(on pourra calculer A^2)*

Exercice 3.

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geqslant 1 + 2n$.

Exercice 4.

Calculer les sommes suivantes : pour tout entier naturel n,

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} k\,(n-k)$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k-1}{5}$

3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+5} 3^{k+1}\,4^{n-k}$

Exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

Remarque : on admet que la suite est bien définie, soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\,u_n}$
2. En déduire que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \sqrt{2}$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$
3. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$
4. *(facultatif)* En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$