

Informatique

```
from math import *
def fonction(x):
    if x > 0:
        y = log((x+1)/x)
        return y
    if x == 0:
        return 1
```

Exercice 1

①.

On pose $X = n^2$

donc (1) $\Leftrightarrow 2X^2 + 3X - 2 = 0$, avec $X \geq 0$

$$\Delta = 9 + 2 \times 2 \times 4 = 25 = 5^2 > 0$$

donc (1) $\Leftrightarrow X = \frac{-3-5}{4} \notin \mathbb{R}_+$ ou $X = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \geq 0$.

$$\Leftrightarrow n^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Conclusion:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

②.

On résout dans $\mathbb{R}_+$.

On pose $X = \sqrt{n} \geq 0$

donc (2) $\Leftrightarrow X^2 + 5X - 3 = 0$, avec $X \geq 0$

$$\Delta = 25 + 3 \times 4 = 37 > 0$$

donc (2) $\Leftrightarrow X = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2} < 0$ ou $X = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$

$$\text{or } 37 > 25 \text{ donc } \sqrt{37} > 5 \text{ donc } \frac{-5+\sqrt{37}}{2} > 0$$

$$\text{donc } (2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-5+\sqrt{37}}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right)^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Conclusion: } \boxed{S = \left\{ \left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right)^2 \right\}}$$

$$(3) \quad x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ donc on résout dans } \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\forall x \neq 1, (3) \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3-2(x-1)}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Conclusion: } \boxed{S =]1, +\infty[}$$

(4.)

$$+ (-2) \text{ et donc } 3 \text{ sont racines de } x^2-x-6, \text{ et } x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$$

$$+ (-2) \text{ et donc } \frac{1}{2} \text{ sont racines de } 2x^2+3x-2 \text{ et } 2x^2+3x-2 = 2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x-1)$$

Donc on résout sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3, \frac{1}{2}\}$:

$$(4) \Leftrightarrow \frac{2}{(x+2)(x-3)} + \frac{x}{(x+2)(2x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x-1) + x(x+3)}{(x+2)(x-3)(2x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{(x+2)(x-3)(2x-1)} \leq 0$$

1 et donc (-2) sont racines de $x^2 + x - 2$.

Tableau de signes:

x	$-\infty$	-2	$1/2$	1	3	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+	○	-	-	○	+
$x + 2$	-	○	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	○
$2x - 1$	-	-	○	+	+	+
$\frac{x^2 + x - 2}{(x+2)(x-3)(2x-1)}$	-		-		+	

Conclusion:

$$S =]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, 1[\cup [1, 3[$$

Exercice 2

$$\left(\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} \right)^2 = a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}$$

$$\left(\sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} \right)^2 = a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} &= \sqrt{(a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b})(a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b})} \\
 &= \sqrt{a^2 - (2\sqrt{a-b}\sqrt{b})^2} \\
 &= \sqrt{a^2 - 4(a-b)b} \\
 &= \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} \\
 &= \sqrt{(a-2b)^2} \\
 &= |a-2b|
 \end{aligned}$$

or $a \leq 2b$ donc $a-2b \leq 0$

$$\text{donc } \sqrt{a+2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} \sqrt{a-2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} = 2b-a$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } A^2 &= a + 2\sqrt{b-a}\sqrt{b} + 2(2b-a) + a - 2\sqrt{b-a}\sqrt{b} \\ &= 2a + 2(2b-a) \\ &= 2(a+2b-a) \quad \text{donc } A^2 = 4b \end{aligned}$$

$$\text{or } A \geq 0 \quad \text{donc } \sqrt{A^2} = |A| = A.$$

Conclusion : $A = 2\sqrt{b}$

Exercice 3.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geq 1+2n$.

$$\text{pour } n=0: \left. \begin{array}{l} 3^0 = 1 \\ 1+2 \times 0 = 1 \end{array} \right\} \text{propriété initialisée}$$

pour $n \geq 0$: $\text{Sg } 3^n \geq 1+2n$ à un certain rang n .

$$\text{Pg } 3^{n+1} \geq 1+2(n+1), \text{ soit } 3^{n+1} \geq 3+2n$$

$$3^{n+1} = 3^n \times 3 \quad \text{donc par (H.R.) } 3^{n+1} \geq 3(1+2n)$$

$$3^{n+1} \geq 3+6n$$

$$\text{or } 3+6n = (3+2n) + 4n \quad \text{et } 4n \geq 0$$

$$\text{donc } 3+6n \geq 3+2n$$

$$\text{donc } 3^{n+1} \geq 3+2n \quad \checkmark$$

Conclusion: Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}: 3^n \geq 1+2n$

Exercise 4.

$$\begin{aligned} \textcircled{1.} \quad \sum_{k=2}^{n+2} k(n-k) &= n \sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{k=2}^{n+2} k^2 \\ &= n \left(\sum_{k=1}^{n+2} k - 1 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+2} k^2 - 1^2 \right) \\ &= n \left(\frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1 \right) - \left(\frac{(n+2)(n+3)(2(n+2)+1)}{6} - 1 \right) \\ &= \frac{n(n+2)(n+3) - 2n}{2} - \frac{(n+2)(n+3)(2n+5) - 6}{6} \\ &= \frac{(n+2)(n+3) [1n - (2n+5)] - 6n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+2)(n+3)(n-5) - 6n + 6}{6} \\ &= \boxed{\frac{n^3 - 25n - 24}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2.} \quad \sum_{k=0}^n \frac{2^k - 1}{5} &= \frac{1}{5} \left(\sum_{k=0}^n 2^k - (n+1) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - (n+1) \right) \quad \text{Car } 2 \neq 1 \\ &= \frac{1}{5} \left(2^{n+1} - 1 - n - 1 \right) \\ &= \boxed{\frac{2^{n+1} - n - 2}{5}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=3}^{n+5} 3^{k+1} 4^{n-k} &= 3 \times 4^n \sum_{k=3}^{n+5} \left(\frac{3}{4} \right)^k \\
 &= 3 \times 4^n \sum_{k=3}^{n+5} \left(\frac{3}{4} \right)^k \\
 &= 3 \times 4^n \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^3 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+6}}{1 - \frac{3}{4}} \quad \text{car } \frac{3}{4} \neq 1 \\
 &= 3 \times 4^n \times 4 \left(\left(\frac{3}{4} \right)^3 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+6} \right) \\
 &= 3 \times 4^{n+1} \times \left(\frac{3}{4} \right)^3 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+3} \right] \\
 &= 3^4 \times 4^{n-2} \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+3} \right)
 \end{aligned}$$

Exercice 5

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} \\
 &= \frac{u_n^2 + 2 - \sqrt{2} \times 2u_n}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + (\sqrt{2})^2}{2u_n}
 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.

(a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \sqrt{2}$

$$\underline{n=1} \quad u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{2}{u_0} \right) = \frac{1}{2} (1+2) = \frac{3}{2}$$

$\sqrt{2} \approx 1,4$ donc $u_1 \geq \sqrt{2}$: propriété initialisée

$n \geq 1$.

$\text{Sg } u_n \geq \sqrt{2}$ à un certain rang n

$\text{Pg } u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \quad \text{par la question 1.}$$

$$\text{or } (u_n - \sqrt{2})^2 \geq 0$$

$$\text{et par (HR), } u_n - \sqrt{2} > 0 \quad \text{donc } 2u_n > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{donc } u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0 \\ u_{n+1} \geq \sqrt{2} \quad \checkmark \end{array} \right\}$$

Conclusion: Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{2}}$.

$$(5) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{2} \quad \text{donc } 2u_n \geq 2\sqrt{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq 1$$

$$\text{et de même: } u_0 = 1 \quad \text{donc } \frac{1}{2u_0} = \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2u_n} \leq 1$$

$$\text{or } (u_n - \sqrt{2})^2 \geq 0 \quad \text{donc } \frac{(u_{n+1} - \sqrt{2})^2}{2u_n} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$$

$$\text{Donc: } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2}$$

$$(3) \quad \text{Par récurrence sur } n \in \mathbb{N}^*: u_n - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2} - 1)^{2^n}$$

$n=1$

$$u_1 - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$$

$$(\sqrt{2} - 1)^{2^1} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{donc } u_1 - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2} - 1)^{2^1} \\ \text{propriété initialisée} \end{array} \right\}$$

2. n ≥ 1

$$S_4 \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$$

$$P_4 \quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^{n+1}}$$

D'après 2.(b), $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$

or par (H.R.): $u_n - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$

donc $(u_n - \sqrt{2})^2 \leq ((\sqrt{2}-1)^{2^n})^2$ puisque $(n \mapsto 2^n)$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $u_n - \sqrt{2} \geq 0$ (cf 2.(a))
 $(\sqrt{2}-1)^{2^n} > 0$

$$\text{or } ((\sqrt{2}-1)^{2^n})^2 = (\sqrt{2}-1)^{2^n \times 2} = (\sqrt{2}-1)^{2^{n+1}}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^{n+1}}$$

Conclusion par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$

(4.)

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \approx 1,4 \text{ donc } 0 < \sqrt{2}-1 < 1 \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2}-1)^{2^n} = 0$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underline{0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}}$

donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{2} = 0$

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$