

Exercice 1

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+	
$-2x+3$		+	0	+	0	-	

* Si $x < 1$:

$$\begin{aligned}
 (E) & \Leftrightarrow x-1 - (-2x+3) = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow -x+1 + 2x-3 = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow x-2 = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow 3x = -3 \\
 & \Leftrightarrow x = -1 < 1
 \end{aligned}$$

* Si $1 \leq x < \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
 (E) & \Leftrightarrow x-1 - (-2x+3) = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow x-1 + 2x-3 = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow 3x-4 = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow x = -5 \notin [1, \frac{3}{2}]
 \end{aligned}$$

* Si $x \geq \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
 (E) & \Leftrightarrow x-1 - (2x-3) = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow x-1 - 2x+3 = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow -x+2 = 4x+1 \\
 & \Leftrightarrow 5x = 1 \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \quad \text{or} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{10} < \frac{15}{10} \left(= \frac{3}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$S = \{-1\}$$

Exercice 2 -

$$\forall n \neq -3:$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{2x+m}{x+3} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+m-x-3}{x+3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+(m-3)}{x+3} \geq 0$$

* Si $m < 6$:

$$-m > -6$$

$$-m+3 > -3$$

d'où le tableau de signes:

x	$-\infty$	-3	$-m+3$	$+\infty$
$x+(m-3)$		-	-	+
$x+3$	-	+	+	+
$\frac{x+(m-3)}{x+3}$	+	-	+	+

$$S =]-\infty, -3[\cup [-m+3, +\infty[$$

* Si $m > 6$:

$$-m < -6$$

$$-m+3 < -3$$

d'où le tableau de signes:

x	$-\infty$	$-m+3$	-3	$+\infty$
$x+(m-3)$	-	+	+	+
$x+3$	-	-	+	+
$\frac{x+(m-3)}{x+3}$	+	-	+	+

$$S =]-\infty, -m+3] \cup]-3, +\infty[$$

* Si $m = 6$:

$$S = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Exercice 3 -

①. $U_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4$ donc $U_0 = 3$.

$U_1 = u_2 + 2u_1 = 13 + 2 \times (-5)$ donc $U_1 = 3$.

Conjecture: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3$.

②. $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2}$
 $= 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$
 $= (2u_{n+2} + u_{n+1}) - u_{n+1} - 2u_n$
 $= 2(u_{n+2} + u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n)$
 $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$

③. Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 3$.

D'après 1.:

$\begin{cases} \text{à } n=0: U_0=3 \\ \text{à } n=1: U_1=3 \end{cases}$ donc la propriété est initialisée aux deux premiers rangs -

• Soit $U_n = 3$ et $U_{n+1} = 3$ à un certain rang n

Alors: $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$ (d'après 2.)
 $= 2 \times 3 - 3$ (par H.R.)
 $= 6 - 3$
 $= 3 \checkmark$

• Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3$.

④. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 = u_{n+1} + 2u_n$

⑤. donc $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

On résout $x = -2x + 3$. ($\Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$)

Donc $(u_n - 1)_n$ est géométrique de raison (-2) , donc:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 1 = (-2)^n (u_0 - 1) = (-2)^n (4 - 1) = 3 \times (-2)^n$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times (-2)^n + 1$.

6.

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (3 \times (-2)^k + 1)$$

$$= 3 \sum_{k=0}^n (-2)^k + (n+1)$$

$$= \cancel{3} \times \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} + (n+1)$$

$$= n+1 + 1 - (-2)^{n+1}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n u_k = n+2 - (-2)^{n+1}}$$