Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2022/2023
Mme MOREL

DS 2 – MATHÉMATIQUES

mercredi 12 octobre 2022

Durée du devoir : 3 heures 30

***La présentation, la lisibilité,* l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.**

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de quatre exercices et d'un problème indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Question de cours.

1. En utilisant le cerce trigonométrique, exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ en fonction de $\sin\theta$, pour tout réel θ.
2. Énoncer la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que pour tout réel x ,

$$\ln\left(\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2+\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{2}\right)=-2x+\ln\left(1+e^{4x}\right)$$

Exercice 1.

Montrer le résultat :

Pour tout entier naturel n, si n^3 est pair alors n est pair.

Exercice 2.

On considère l'équation (E) d'inconnue $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ définie par :

$$(E)\qquad \sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$$

1. Démontrer que : $\forall a\in]0,1[,\ \sqrt{a}>a^2$.
2. En déduire que : $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>1$
3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 3.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=2$, $u_1=-2$ et $u_2=3$, et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_{n+3}-3\,u_{n+1}+2\,u_n=0$$

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $w_n=u_n-(-2)^n$.

1. Vérifier que : $w_2-2\,w_1+w_0=0$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2\,w_{n+1} + w_n = 0$
3. Exprimer w_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 4.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j)$$

1. Que vaut P_0 ?
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,P_{k-1} = 1$

Dans la suite de l'exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $a_j = \dfrac{j}{n}$ de sorte que :

$$P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

1. Calculer P_n.
2. Montrer que : pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on a

$$P_k = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}$$

3. La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?
4. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1$$

Problème.

Dans tout le problème, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout réels a, b, on pose :

$$S_m(a,b) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suites réelles}/u_0 = a, u_1 = b, \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = u_{n+1} + m\,u_n\}$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_m) \qquad x^2 - x - m = 0$$

Déterminer le nombre de solutions de (E_m) en fonction de m.

2. **Langage PYTHON :**
Écrire une fonction `nb_sol(m)` qui renvoie le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 - x - m = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: (E_1) et $\left(E_{-\frac{1}{4}}\right)$.
4. Soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \dfrac{1}{4}\,\alpha_n$.
   (a) **Langage PYTHON :**
      i. On considère les deux fonctions suivantes :

```
def alpha(n):
        u0=2
        u1=3
        for i in range(n):
                u1=u1-0.25*u0
                u1=u0
        return u0
```

et

```
def alphabis(n):
        u0=2
        u1=3
        for i in range(n):
                u=u1
                u1=u-0.25*u0
                u0=u
        return u
```

Déterminer les valeurs renvoyées par `alpha(3)` et `alphabis(3)`

ii. Proposer une fonction `alphater(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant la valeur de α_n.

(b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de α_n en fonction de n.

(c) Déterminer des réels a, b et m tels que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.

5. On définit la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(b) **Langage PYTHON :**
Déduire de la question précédente, une fonction `Lucas(n)` qui renvoie la valeur de L_n.

(c) Soient a, b, m trois réels. Montrer que si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$, alors $a = 2$, $b = 1$ et $m = 1$.

6. Soient a, b, m trois réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_m(a,b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ dans certains cas.

(a) Cas 1 : $m = 0$.

i. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} u_k$

ii. Pour tout $n \geqslant 2$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(b) Cas 2 : $m \neq 0$.
En remarquant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{1}{m}\,(u_{k+2} - u_{k+1})$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

8. (a) **Langage PYTHON :**
Écrire une fonction `somme_Lucas(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k$
on pourra utiliser la fonction de la question 5(b)

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k$.