DS2 - 12/10/2022

Corrigé

COURS

(3.)

$$\ln\left(\frac{(e^{x}+e^{-x})^2+(e^{x}-e^{-x})^2}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x}+\cancel{2}+e^{-2x}+e^{2x}-\cancel{2}+e^{-2x}}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{2}(e^{2x}+e^{-2x})}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \ln(e^{2x}+e^{-2x})$$

$$= \ln(e^{-2x}(e^{4x}+1))$$

$$= \ln(e^{-2x}) + \ln(1+e^{4x})$$

$$= \underline{-2x+\ln(1+e^{4x})} \quad ✓$$

Exercice 1

Par contraposée : supposons que n est impair.
montrons que n^3 est impair.

n est impair : $\exists\, p \in \mathbb{N} \,/\, n = 2p+1$

donc $n^3 = (2p+1)^3 \underset{\text{binôme de Newton}}{=} \binom{3}{0}(2p)^3 + \binom{3}{1}(2p)^2 + \binom{3}{2}(2p)^1 + \binom{3}{3}(2p)^0$

n \ p	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

$$= 1\times 8p^3 + 3\times 4p^2 + 3\times 2p + 1$$

$$= 8p^3+12p^2+6p+1$$

$$= 2\underbrace{[4p^3+6p^2+3p]}_{\in\mathbb{N}}+1$$

donc n^3 est impair ✓

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, si n^3 est pair alors n est pair

Exercice 2 :

1. $\forall a \in]0,1[,\ \sqrt{a} > a^2 \iff a > a^4$ car $(x \mapsto x^2)$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$ et $\begin{cases} \sqrt{a} \geq 0 \\ a^2 \geq 0 \end{cases}$

$\iff a - a^4 > 0$

$\iff a(1-a^3) > 0 \iff a(1-a)(1+a+a^2) > 0$ (Bernoulli)

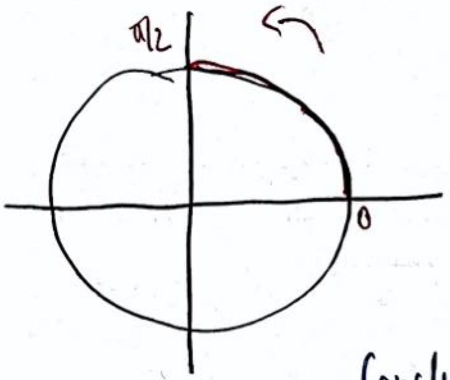
Or :

a	0		1
a	0	$+$	
$1-a$		$+$	0
$a(1-a)$	0	$+$	0

et $1+a+a^2 > 0$ car $\Delta < 0$.

Conclusion : $\forall a \in]0,1[,\ \sqrt{a} > a^2$

2.



$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[,\ 0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$

on peut donc appliquer la question précédente : $\sqrt{\cos x} > \cos^2 x$

et $\sqrt{\sin x} > \sin^2 x$

Donc : $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} > \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1}$

Conclusion : $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[,\ \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} > 1$

3. D'après la question précédente, aucun réel de $]0,\frac{\pi}{2}[$ n'est solution.

* si $x = 0$: $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = \sqrt{1} + \sqrt{0} = 1$ donc 0 est solution de (E)

* si $x = \frac{\pi}{2}$: $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = 1$ donc $\frac{\pi}{2}$ est solution de (E)

Conclusion : $\boxed{S = \{0, \frac{\pi}{2}\}}$

Exercice 3 :

(1.) $\left.\begin{array}{l} w_0 = u_0 - (-2)^0 = 2-1 = 1 \\ w_1 = u_1 - (-2)^1 = -2+2 = 0 \\ w_2 = u_2 - (-2)^2 = 3-4 = -1 \end{array}\right\}$ donc $w_2 - 2w_1 + w_0 = -1+1 = 0$ ✓

(2.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$

* $n=0$: c'est la question précédente !

* Supposons que $w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$ à un certain rang n.

Montrons que $w_{n+3} - 2w_{n+2} + w_{n+1} = 0$.

$$\begin{aligned} \cdot\, w_{n+3} &= u_{n+3} - (-2)^{n+3} \\ &= 3u_{n+1} - 2u_n - (-2)^{n+3} \\ &= 3w_{n+1} + 3(-2)^{n+1} - 2w_n - 2(-2)^n - (-2)^{n+3} \\ &= 3w_{n+1} - 2w_n + \underbrace{3(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} - (-2)^2(-2)^{n+1}}_{=(-2)^{n+1}[3+1-4]=0} \end{aligned}$$

Donc : $\cdot\, w_{n+3} - 2w_{n+2} + w_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= 3w_{n+1} - 2w_n - 2w_{n+2} + w_{n+1} \\ &= -2w_{n+2} + 4w_{n+1} - 2w_n \\ &= -2\underbrace{(w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n)}_{=0 \text{ par (HR)}} \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

* Conclusion : par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$

(3.) Equation caractéristique : $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = 1$

Donc : $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n$

avec : $\left\{\begin{array}{ll} \lambda = 1 & (n=0) \\ \lambda + \mu = 0 & (n=1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = -\lambda = -1 \end{array}\right.$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = 1-n}$

(4.) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = w_n + (-2)^n$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 1-n+(-2)^n}$

(5.) $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(1-k+(-2)^k\right) = n+1 - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(-2)^k$$

$$= n+1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} \quad \text{car } -2\neq 1$$

$$= \frac{2(n+1)-n(n+1)}{2} + 3\left(1-(-2)^{n+1}\right)$$

Conclusion : $$= \boxed{\frac{(n+1)(2-n)}{2} + 3\left(1-(-2)^{n+1}\right)}$$

Exercice 4 -

(1.) $P_0 = \prod_{j=1}^{0}(1-a_j)$ donc $\boxed{P_0 = 1}$

(2.) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: $P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$

* $n=0$: $P_0 + \sum_{k=1}^{0} a_k P_{k-1} = P_0 + 0 = 1$ ✓

* Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n.

Montrons que $P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} = 1$

$$P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} = P_n\left(1-a_{n+1}\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k P_{k-1} + a_{n+1}P_n$$

$$= P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1}$$

$$= 1 \text{ par (HR)} ✓$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{n-1} = 1$

(1.) $P_n = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j}{n}\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \underbrace{\prod_{j=1}^{n}(n-j)}_{(n-1)(n-2)\dots\underbrace{(n-n)}_{=0}} = 0$

Donc : $\boxed{P_n = 0}$

(2.) $P_k = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j}{n}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{n-j}{n}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{k}(n-j)}{\prod_{j=1}^{k} n} = \frac{1}{n^k} \prod_{j=1}^{k}(n-j)$

$= \frac{1}{n^k} \times \left((n-1)(n-2)\dots(n-k)\right)$

D'autre part : $k!\binom{n-1}{k} = \cancel{k!}\, \frac{(n-1)!}{\cancel{k!}\,((n-1)-k)!} = (n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-\cancel{1}-k+\cancel{1})$

Conclusion : $P_k = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}$

(3.) Si $k=0$: $\frac{0!}{n^0}\binom{n-1}{0} = \frac{1}{1} \times 1 = 1$

or $P_0 = 1$

donc la formule est vraie pour $k=0$

(4.) On sait que $P_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P_{k-1} = 1$

or $P_n = 0$ et $P_{k-1} = \frac{(k-1)!}{n^{k-1}}\binom{n-1}{k-1}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{\overbrace{k \times (k-1)!}^{=k!}}{\underbrace{n \times n^{k-1}}_{=n^k}}\binom{n-1}{k-1} = 1$

Soit : $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1$

Problème :

1. $\Delta = 1+4m$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	
nb de solutions de (E_m)		0	1	2.	

2.

```
def nb_sol(m):
    delta = 1+4*m
    if delta > 0:
        return 2
    if delta == 0:
        return 1
    return 0
```

3.

* $m=1$: $x^2-x-1=0$ (E_1)

$\Delta = 5 > 0$ donc $\boxed{S_1 = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}}$

* $m=-\frac{1}{4}$: $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ $\left(E_{-\frac{1}{4}}\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ donc $\boxed{S_{-\frac{1}{4}} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}$

4.

(a)

i)

* Dans la fonction alpha, la valeur de u0 n'est jamais modifiée

donc $\boxed{\text{alpha(n) renvoie } 2}$

* Dans la fonction alphabis,

pour $i=0$ (1$^{\text{er}}$ tour de boucle), u prend la valeur 3

puis la valeur de u n'est jamais modifiée

Donc $\boxed{\text{alphabis}(n) \text{ renvoie } 3.}$

ii)

```
def alphater(n):
    u0 = 2
    u1 = 3
    for i in range(n):
        u = u1
        u1 = u1 - 0.25 * u0
        u0 = u
    return u0
```

(b) Equation caractéristique : $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

Donc $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = (\lambda + \mu n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, avec :

$$\begin{cases} \lambda = \alpha_0 = 2 \\ \frac{\lambda + \mu}{2} = \alpha_1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 4 \end{cases}$$

Donc : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},}\ \alpha_n = (2 + 4n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit $\boxed{\alpha_n = (1+2n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(c) $\alpha_0 = 2$ donc on prend $\boxed{a = 2}$

$\alpha_1 = 3$ donc on prend $\boxed{b = 3}$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\alpha_n$ donc on prend $\boxed{m = -\frac{1}{4}}$

donc $(\alpha_n) \in \mathcal{S}_m(a, b)$ par définition.

5.

(a) Equation caractéristique : $x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$(\Delta = 5 > 0)$

donc $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \alpha_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$,

avec : $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = L_0 = 2 \\ \alpha_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = L_1 = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 (1-\sqrt{5}) + \alpha_2 (1+\sqrt{5}) = 2 \end{cases}$ $\iff \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{=2} + \sqrt{5}(\alpha_2 - \alpha_1) = 2$

$\iff \sqrt{5}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$

$\iff \alpha_2 - \alpha_1 = 0$

$\iff \alpha_2 = \alpha_1$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 2 - \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2\alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

(b)
```
from math import *
def Lucas(n):
    return ((1-sqrt(5))/2)**n + ((1+sqrt(5))/2)**n
```

(c) car $L_m \in S_m(a,b)$

$L_0 = 2 = a$ donc $a = 2$

$L_1 = 1 = b$ donc $b = 1$

or $\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n = L_{n+1} + m L_n$

donc pour $n = 0$: $L_2 = L_1 + L_0 = \underbrace{a+b}_{=3} = L_1 + m L_0 = 1 + 2m$

donc $1+2m=3 \Leftrightarrow 2m=2 \Leftrightarrow m=1$.

Conclusion : $a=2$, $b=1$ et $m=1$

6.

(a) $m=0$:

i. $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = a$

$\sum_{k=0}^{1} u_k = u_0 + u_1 = a+b$

$\sum_{k=0}^{2} u_k = u_0 + u_1 + u_2 = a+b+u_2$ avec $u_2 = u_1 + 0\times u_0 = u_1 = b$

donc $\boxed{\sum_{k=0}^{2} u_k = a+2b}$.

ii. $\forall n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + m u_n = u_{n+1}$ car $m=0$ (suite constante)

donc $\forall n \geq 2$, $u_n = u_1 = b$.

Donc, $\forall n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k$$

$$= a+b + \sum_{k=2}^{n} b$$

$$= a+b+(n-2+1)b$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = a+nb}$.

(b) $m \neq 0$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = u_{k+1} + m u_k$

donc $m u_k = u_{k+2} - u_{k+1}$

$u_k = \frac{1}{m}(u_{k+2} - u_{k+1})$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}) \quad \text{(somme télescopique)}$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k+2} - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=2}^{n+2} u_k - \sum_{k=1}^{n+1} u_k\right) \quad \begin{pmatrix} k' = k+2 \\ k'' = k+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m}\left(u_{n+2} - u_1\right)$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{m}\left(u_{n+2} - b\right)}$

7. pour la suite (d_n) : $m = -\frac{1}{4} \neq 0$ et $b = 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = (1+2n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

donc la question précédente donne :

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = -\frac{1}{\frac{1}{4}}\left(\left(1+2(n+2)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2-1} - 3\right)$$

Soit : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} d_k = -4\left((2n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3\right)}$

8. (a)

```
def somme_Lucas(n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s=s+ Lucas(k)
    return s.
```

(b) $m = 1$, $b = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} L_k = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - 1.}$$