

Résolution de systèmes linéaires

I. Présentation des méthodes de résolution : substitution et élimination

Résoudre le système $(\mathcal{S})$:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

résolution par substitution

1. On exprime y en fonction de x à l'aide d'une des équations, par exemple avec la seconde :

$y =$

2. On remplace y dans l'autre équation par le résultat obtenu à l'étape précédente :

$$2x + 3 \times (\quad) = 1$$

3. On résout l'équation du premier degré en x :

4. On calcule la valeur de y avec l'expression de l'étape 1:
 $y =$

5. Présentation des calculs :

résolution par élimination

1. On multiplie chacune des équations du système par des nombres réels de sorte que par addition ou soustraction, l'une des inconnues soit éliminée :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \times 3 \\ \times (-2) \end{array} \iff \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ -6x - 8y = -10 \end{cases}$$

Par addition membre à membre, on obtient dans la deuxième équation :

$$y = -7.$$

2. On remplace y dans la première équation pour déterminer x (substitution remontante) :

$$6x + 9 \times (-7) = 3 \dots$$

3. Présentation des calculs :

Ces deux méthodes de résolution sont basées sur la réduction du nombre d'inconnues. La méthode par substitution devient très fastidieuse quand le nombre d'inconnues augmente: elle entraîne beaucoup de calculs, avec donc de fortes chances de se tromper. La méthode par élimination, elle, est plus simple, c'est donc cette méthode qui est privilégiée pour les "gros" systèmes linéaires.

Remarque 1 Dans le cas de systèmes non linéaires, on pourra penser à la substitution.

Exemple : $(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + y = -2 \\ x \times y = -3 \end{cases}$

Par substitution: $(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x = -2 - y \\ (-2 - y) \times y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 - y \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

On retrouve le produit et la somme des racines d'un trinôme du second degré...

Les couples $(1, -3)$ et $(-3, 1)$ sont solutions. Or on établira au chapitre concerné qu'un système linéaire a zéro, une ou une infinité de solutions...

II. Vocabulaire des systèmes linéaires

Definition 1 On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $(x_1, \dots, x_p)$ tout système $(\mathcal{S})$ de la forme:

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où:

- les **inconnues** de $(\mathcal{S})$ sont les nombres complexes ou réels $x_1, \dots, x_i, \dots, x_p$,
- les **coefficients** de $(\mathcal{S})$ sont les nombres $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Ils sont affectés d'un double indice: le premier, i , est l'indice de l'équation, le second, j , l'indice de l'inconnue:

a_{ij} est le coefficient de la $j^{\text{ième}}$ inconnue dans la $i^{\text{ième}}$ équation.

- le **second membre** de $(\mathcal{S})$ est $(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)$, où $b_i \in \mathbb{K}$, pour tout i .
- Une **solution** de $(\mathcal{S})$ est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations.

Résoudre $(\mathcal{S})$, c'est déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.

Deux systèmes linéaires $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque 2 : il n'y a pas forcément autant d'inconnues que d'équations !

Exemples:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

Definition 2 :

Un système linéaire **échelonné** est un système linéaire dont chaque ligne commence par plus de coefficients nuls que la ligne précédente.

Un système échelonné contenant autant d'équations que d'inconnues est dit **triangulaire**.

Exemple:

$$(\mathcal{S}_1) \quad \begin{cases} \boxed{2}x + y + z = 5 \\ \boxed{-1}y + 2z = -1 \\ \boxed{5}z = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \quad \begin{cases} \boxed{1}x + y + 2z + t = 1 \\ \boxed{2}z - t = -3 \end{cases}$$

III. Résolution des systèmes linéaires

Ainsi présenté à la partie I., ce n'est pas un raisonnement par équivalences. En effet, on passe de deux équations à une seule. Il n'est *a priori* pas possible de refaire le chemin à l'envers et de passer de l'équation $-x = -6$ au système initial sans indications supplémentaires.

Definition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire à n équations, p inconnues.

$\forall i \in [1, n]$, on note L_i la $i^{\text{ième}}$ équation de $(\mathcal{S})$, appelée aussi la $i^{\text{ième}}$ ligne de $(\mathcal{S})$.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes l'une des trois transformations suivantes:

- $L_i \leftarrow a L_i$, $a \neq 0$: multiplier la $i^{\text{ième}}$ ligne par a .
- Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger les lignes i et j .
- $L_i \leftarrow L_i + a L_j$, $i \neq j$: ajouter à la $i^{\text{ième}}$ ligne, la $j^{\text{ième}}$ ligne multipliée par a .

Proposition 1 (admise): Tout système obtenu à partir de $(\mathcal{S})$ en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à $(\mathcal{S})$, et a donc le même ensemble de solutions.

Remarque 3 :

(1) Ne JAMAIS multiplier deux lignes entre elles!!! On ne multiplie JAMAIS la ligne que l'on touche par zéro !! (on perd l'équivalence des systèmes).

(2) L'opération suivante est licite (en combinant la première et la troisième):

$$L_i \leftarrow a L_i + b L_j \text{ (avec } a \neq 0, i \neq j \text{)}.$$

(3) Sur une copie, toujours indiquer les opérations élémentaires effectuées:

LE CORRECTEUR NE LIRA AUCUN CALCUL NON COMMENTE

Les systèmes échelonnés étant simples à résoudre, il existe une méthode qui consiste, en un nombre fini d'étapes, à transformer un système linéaire ($\mathcal{S}$) quelconque, en un système **échelonné** ($\mathcal{T}$) **équivalent** à ($\mathcal{S}$). A chaque étape de cette méthode, on utilise des opérations élémentaires sur les lignes.

Exemple:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = -2 \\ 3y + z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \iff \begin{cases} x = 3 - y - z = -3 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion: $\mathcal{S} = \{(-3, -2, 8)\}$ (unique solution: système de Cramer).

IV. Entraînement

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 12x + 7y = 4 \\ 4x - 15y = 2 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 3x - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$	7. $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 12x - y = -4 \\ 41x - 3y = -7 \end{cases}$	5. $\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 3y - z = 1 \\ 8z = 5 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = -6 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 12x - 15y = 7 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 9x + 3y - 3z = 0 \\ -5x + y - 6z = -1 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$