Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2022/2023
Mme MOREL

DS 3 – MATHÉMATIQUES

mercredi 16 novembre 2022

Durée du devoir : 3 heures

***La présentation, la lisibilité,* l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.**

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Exercice de cours.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(1-x^2) - \ln(2x+1) = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x - 6\,e^{-x} + 1 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^4 - 7z^2 - 4 = 0$
4. Calculer la somme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k+1} 2^k$
5. Donner la forme algébrique du complexe : $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{3i-\sqrt{3}}$
6. **(langage Python)**
   Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_1 = 5$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{n^3}{n^2+1}$.
   (a) Écrire une fonction Python `suite(n)`, prenant en argument un entier $n \geqslant 1$ et renvoyant la valeur de u_n.
   (b) Écrire une fonction Python `monotonie(n)`, qui teste si la suite est monotone ou pas jusqu'au rang n.

Exercice 1.

1. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall n \geqslant p, \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{k+p}{p}$.
   (b) Soient deux entiers k, p. Justifier que : $\dbinom{p+k}{p} = \dbinom{p+k+1}{p+1} - \dbinom{p+k}{p+1}$.
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant p, \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
2. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \geqslant 2$, $k^2 = a\dbinom{k}{2} + b\dbinom{k}{1}$.
   La formule est-elle encore vraie pour $k=0$ et $k=1$?
3. En utilisant les résultats des questions 2. et 1.(c), retrouver l'expression de la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, pour tout entier naturel n.

Exercice 2.

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On souhaite calculer le produit suivant

$$P = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. **(langage Python)**
   Écrire une fonction Python `prod` prenant en argument $n \geqslant 2$ et renvoyant P.
2. Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sur $\mathbb{C}$.
3. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :
   $z^3 + 1 = (z+1)(z+\mathtt{j})(z+\mathtt{j}^2)$ et $z^3 - 1 = (z-1)(z-\mathtt{j})(z-\mathtt{j}^2)$.
4. En déduire que $P = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{\mathtt{j}+k}{\mathtt{j}+k+1}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{-\mathtt{j}+k-1}{-\mathtt{j}+k}\right)$.
5. Simplifiez l'expression précédente et conclure que $P = \dfrac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$.

Exercice 3.

Dans cet exercice, on considère trois réels a, b et c tels que :

$$\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 0$$

1. Montrer que : $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$
2. Dans cette question, on pose : $\alpha = a - c$ et $\beta = b - c$.
   (a) Montrer que : $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$
   (b) En déduire que $\alpha = -\beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Pour la suite de l'exercice, on considère, quitte à échanger α et β, que $\sin(\alpha) \geqslant 0$.

   (c) Montrer que $1 + \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0$.
   En déduire que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq \pi + \beta + 2k\pi$.

   Ainsi, il ne reste plus qu'une seule possibilité pour α : $\alpha = -\beta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) Calculer $\cos(\beta)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha)$.
   En déduire que $e^{ia} = j\, e^{ic}$ et $e^{ib} = j^2\, e^{ic}$
3. Montrer que : $e^{i(2a)} + e^{i(2b)} + e^{i(2c)} = 0$.
   En déduire que $\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = 0$ et $\sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ non divisible par 3, c'est-à-dire : $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$, avec $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que : $\cos(na) + \cos(nb) + \cos(nc) = 0$ et $\sin(na) + \sin(nb) + \sin(nc) = 0$

Exercice 4.

Le but de cet exercice est de déterminer la forme exponentielle du complexe :

$$z = \frac{1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\sqrt{1+\sin(2\theta)} + i\sqrt{1-\sin(2\theta)}}, \quad \text{où} \quad \theta \in [0, \pi[$$

1. Justifier que z est bien défini.
2. Déterminer la forme exponentielle du numérateur de z.
3. (a) Montrer que : $1 + \sin(2\theta) = (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2$.
   Obtenir une formule similaire pour $1 - \sin(2\theta)$
   (b) Écrire les expressions $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) - \sin(\theta)$ sous la forme $r\cos(\theta + \varphi)$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
   (c) Résoudre les inéquations $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$, d'inconnue $x \in [0, \pi[$.
4. Déduire des questions précédentes la forme exponentielle du dénominateur de z.
5. En déduire la forme exponentielle de z.