DN4 - Corrigé -

Exercice 1

$$f(x) = e^{(x+1)\ln\left|\frac{x+1}{e^x-1}\right|}$$

$f(x)$ bien définie ssi $e^x-1 \neq 0$ et $\left|\frac{x+1}{e^x-1}\right| > 0$

- $e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$
- $\forall x \neq 0,\ \left|\frac{x+1}{e^x-1}\right| > 0 \iff \frac{x+1}{e^x-1} \neq 0. \iff x \neq -1$

donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}}$

f est dérivable sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$
comme composée et produit de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, $$f'(x) = \left(\ln\left|\frac{x+1}{e^x-1}\right| + \cancel{(x+1)}\,\frac{\frac{1\times(e^x-1)-(x+1)\times e^x}{(e^x-1)^2}}{\frac{\cancel{x+1}}{e^x-1}}\right) f(x)$$

$$f'(x) = \left(\ln\left|\frac{x+1}{e^x-1}\right| + \cancel{(e^x-1)}\,\frac{\cancel{e^x}-1-xe^x-\cancel{e^x}}{(e^x-1)^{\cancel{2}}}\right) f(x)$$

$$\boxed{f'(x) = \left(\ln\left|\frac{x+1}{e^x-1}\right| - \frac{1+xe^x}{e^x-1}\right) f(x)}$$

Exercice 2

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - 4z = -5 \\ -y + z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 3y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -y + z = 0 \\ -z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y - z = 1 + 5 - 5 = 1 \\ y = z = 5 \\ z = 5 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{S = \{(1,5,5)\}}$.

Exercice 3.

- $f(x)$ bien défini ssi $x \neq 0$ et $\frac{x+1}{x} > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc : $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$

- f est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{\frac{1 \times x - (1+x) \times 1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x}}{x^2} \times \frac{\cancel{x}}{1+x} = -\frac{1}{x(x+1)}$$

or $x(x+1) > 0$ (cf tableau de signes) donc $f'(x) < 0$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖		‖ $+\infty$	$\searrow$	0

en l'infini :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale : $y=0$

en 0 : $(x>0)$:

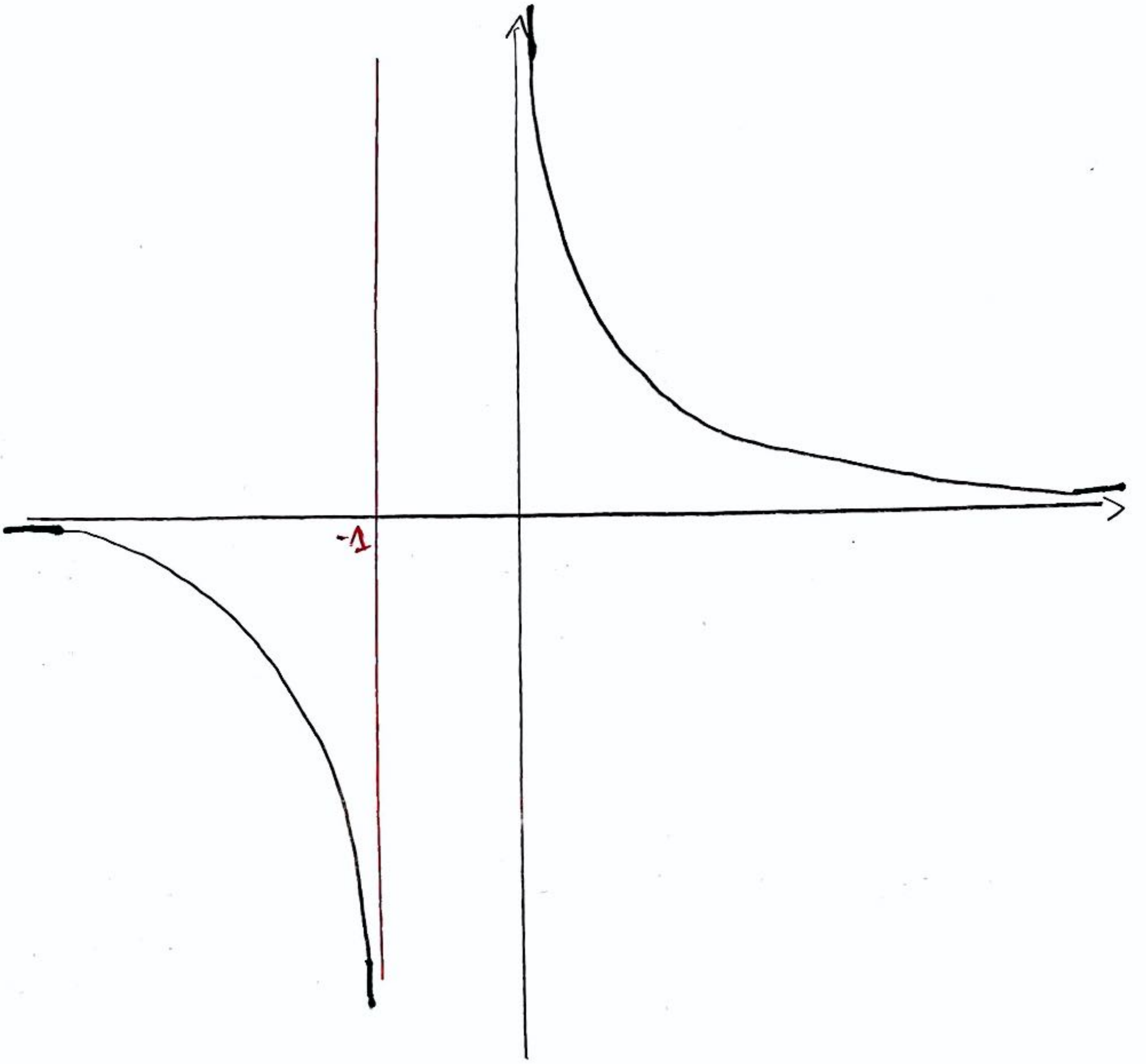
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale : $x=0$

en (-1) : $x<-1$:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x=-1$


-1