

## DS 4 – MATHÉMATIQUES

mercredi 14 décembre 2022

Durée du devoir : 2 heures 30

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

### Exercice 1.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$x^{x^3} \geq x^{4x}$$

### Exercice 2.

Résoudre dans  $] -\pi, \pi ]$  :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin x} < \cos x$$

### Exercice 3.

Résoudre le système suivant selon le paramètre  $m \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ 2x - y + z = m \\ x + 2y - z = m - 1 \\ -x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

### Exercice 4.

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x e^x - e^x + 1 \geq 0$$

### Exercice 5.

Étude de la fonction  $f$  d'expression :

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$$

Ensemble de définition dérivée, variations, allure graphique avec éléments remarquables.

Pour le calcul de limites, on **montrera** que :

1. En zéro :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

2. En l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  en utilisant (**sans démontrer**) le résultat  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$