DS4 - Corrigé
Mercredi 14 Décembre 2022

Exercice 1 :

$(E) \iff e^{x^3 \ln(x)} \geq e^{4x \ln(x)}$

donc on résout sur $]0,+\infty[$:

$(E) \iff x^3 \ln(x) \geq 4x \ln(x)$

$\iff \ln(x)\,(x^3 - 4x) \geq 0$

$\iff x \ln(x)\,(x^2-4) \geq 0 \iff \ln(x)\,(x^2-4) \geq 0$ car $x > 0$

x	0		1		2		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)(x^2-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} =]0,1] \cup [2,+\infty[}$

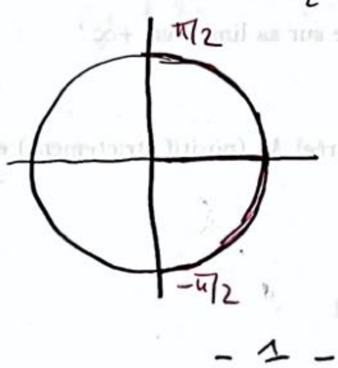
Exercice 2 :

- $\forall x \in]-\pi,\pi]$, $\quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$

donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin(x) \leq \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}\sin(x) \leq \frac{3}{2}$

donc $1 + \frac{1}{2}\sin(x) \geq 0$ donc on résout sur $]-\pi,\pi]$.



- si $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos(x) < 0$

donc l'inéquation n'est pas vérifiée.

- si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

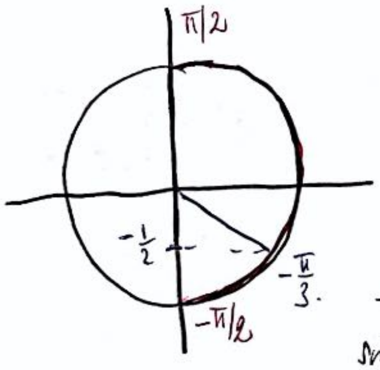
$$\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x} < \cos x \iff 1+\frac{1}{2}\sin x < \cos^2 x$$

car $(x \mapsto x^2)$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x} \geq 0$ et $\cos x \geq 0$

$$\iff \frac{1}{2}\sin x < \cos^2 x - 1$$

$$\iff \frac{1}{2}\sin x < -\sin^2 x$$

$$\iff \sin x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0$$



x	$-\pi/2$		$-\pi/3$		0		$\pi/2$
$\sin x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sin x + \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sin x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]}$

Exercice 3 :

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} ① \; x + y + z = m \\ \quad -3y - z = -m & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad y - 2z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \quad 2y + 2z = 2m+1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1x + y + z = m \\ 1y - 2z = -1 \\ -3y - z = -m \\ 2y + 2z = 2m+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1x + y + z = m \\ 1y - 2z = -1 \\ -7z = -m-3 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ 2z = 2m+3 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1x + y + z = m \\ 1y - 2z = -1 \\ -7z = -m-3 \\ \boxed{0 = 12m + 15} & L_4 \leftarrow 7L_4 + 2L_3. \end{cases}$$

• si $m \neq -\frac{5}{4}$: (S) est incompatible.

• si $m = -\frac{5}{4}$: $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -\frac{5}{4} \\ y - 2z = -1 \\ -7z = \frac{5}{4} - 3 = -\frac{7}{4} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} - y - z = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -1 \\ y = -1 + 2z = -1 + 2 \times \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \right\}}$$

Exercice 4 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on considère $f(x) = xe^x - e^x + 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

<u>Conclusion :</u> $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, soit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ xe^x - e^x + 1 \geq 0}$

Exercice 5 :

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln|x|}$$

- $f(x)$ bien défini ssi $|x| > 0$ et $x \neq 0$ ssi $x \neq 0$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$

- f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln|x| + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}\ln|x|}$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}\ln|x|} \left(1 - \ln|x|\right)$$

- $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln|x| = 0 \iff \ln|x| = 1 \iff |x| = e \iff x = e$ ou $x = -e$
- $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln|x| > 0 \iff \ln|x| < 1 \iff |x| < e \iff -e < x < e$

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^{1/e}}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ 0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

• en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$

• si $x > 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \ln|x| = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

• si $x < 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} \ln|x| = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

• en l'infini :

• en $+\infty$: $x > 0$ donc $\frac{1}{x} \ln|x| = \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

• en $-\infty$: $x < 0$ donc $\frac{1}{x} \ln|x| = \frac{1}{x} \ln(-x) = -\frac{1}{(-x)} \ln(-x)$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

• Allure graphique :

éléments remarquables:

* Tangente horizontale aux points $\left(-e, \frac{1}{e^{1/e}}\right)$ et $\left(e, e^{1/e}\right)$
* $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en l'infini
d'équation $y = 1$
* $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en O.