Devoir Maison 5

À rendre lundi 16 janvier 2023

Exercice 1.

Déterminer le rang du système suivant en fonction du paramètre réel λ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda\, x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & (5-\lambda)\, y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & \lambda\, z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2.

Partie I. Puissances successives d'une matrice

On considère les matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = I - P\,,$$

où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer P^2 et Q^2 et en déduire P^n et Q^n pour tout entier n non nul.
2. Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que:
$$M = P + \alpha Q\,.$$
3. Calculer les produits PQ et QP et en déduire, pour tout entier n non nul, M^n en fonction des matrices P et Q.
4. Expliciter la matrice M^n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II. Suite matricielle

On définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme $p_1 = 0$, $q_1 = 1$ et $r_1 = 1$, et les relations de récurrence:

$$\left\{\begin{array}{l} p_{n+1} = \frac{2}{3}\, p_n + \frac{1}{6}\, q_n + \frac{1}{6}\, r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{6}\, p_n + \frac{2}{3}\, q_n + \frac{1}{6}\, r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{6}\, p_n + \frac{1}{6}\, q_n + \frac{2}{3}\, r_n \end{array}\right.$$

1. Pour tout entier n non nul, on pose: $V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

   Pour tout entier n non nul, exprimer V_{n+1} en fonction de M et V_n.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, $V_n = M^{n-1}\, V_1$.
3. Expliciter la matrice V_n. En déduire les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.