Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2022/2023
Mme MOREL

DS 5 – MATHÉMATIQUES

mercredi 25 janvier 2023

Durée du devoir : 3 heures

***La présentation, la lisibilité,* l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.**

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Exercice 1. langage `python`

1. Écrire une fonction `minimum` prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant son minimum.
2. Écrire une fonction `remplace` prenant en arguments un réel `a` et une liste de réels `L`, et la renvoie après avoir remplacé tous les `a` qu'elle contient par 0.
3. On lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée. Écrire un script qui renvoie la liste des lancers obtenus.
   On pourra prendre une variable qui vaut 0 *si la pièce donne Face et* 1 *si elle donne Pile.*

Exercice 2.

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement supérieur à 2.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la matrice :

$$A_x = \begin{pmatrix} -x & 2 & a \\ 1 & -x & a \\ 1 & 2 & -x \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de A_x.
2. En déduire que A_x n'est pas inversible ssi $x^3 - (3a+2)\,x - 4a = 0$

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, on fixe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0_3$ et $A^3 = 0_3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice

$$M(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

1. Montrer que pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, on a $M(t)M(s) = M(t+s)$.
2. Calculer $M(0)$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est inversible et calculer son inverse $M(t)^{-1}$.
3. En déduire l'expression de $M(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déduire des questions précédentes la matrice $X(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $M = P\,(D+U)\,P^{-1}$; en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P\,(D+U)^n\,P^{-1}$.
3. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, calculer U^j.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $D^k\,U$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(D+U)^n = (2^n - 1)\,U + D^n$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n. En déduire $(D+U)^n$.
7. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$
8. Dans cette question, on considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et $c_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\,b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}\,a_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2}\,b_n + c_n \end{cases}$$
   (a) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = A\,X_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

   (b) Déterminer X_n en fonction de A, X_1 et n.

   (c) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 5.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on définit les deux ensembles :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, A^2M = AM\right\}$$

1. Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$
2. Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$
3. Montrer que si $A - I_3$ est inversible alors $E_1(A)$ ne contient que la matrice nulle.
4. Donner une matrice A pour laquelle $E_1(A) \neq E_2(A)$