Devoir Maison 7

À rendre lundi 20 mars 2023

Première Partie

On considère les matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. En déduire D^n pour tout entier naturel n .
3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer M^n en fonction de P^{-1} , P , D et n .

Deuxième Partie

On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé suivant:

- si la particule se trouve en B ; elle y reste.
- si la particule se trouve en A ; elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C ; à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A .

A la première seconde, la particule se pose de façon équiprobable sur un des trois sommets. Pour tout $n \geq 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "à la n ème seconde, la particule se trouve en A " (resp. B, C), et on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n .

Que valent a_1, b_1 et c_1 ?

1. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n et c_n .

2. On note, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Vérifier que $X_{n+1} = MX_n$.

3. En déduire la valeur de a_n, b_n et c_n .
4. (facultatif) Étudier la convergence des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .