

Exercice 1

①

En 0:

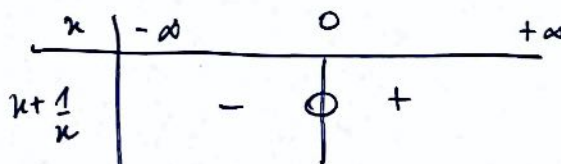
si $x > 0$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

donc indétermination...

il faut enlever la valeur absolue ($\Delta \left|x + \frac{1}{x}\right| \neq |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \Delta$)

donc il nous faut le signe de $x + \frac{1}{x}$...

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$



donc on reprend:

si $x > 0$:

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| = x + \frac{1}{x} \text{ donc } f(x) = x \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 1$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$

si $x < 0$:

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| = -\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ donc } f(x) = -x \left(x + \frac{1}{x}\right) = -x^2 - 1$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$

②

On note $g(x) = \frac{mx^2 + 6x + 5}{x^2 + 1}$

En $+\infty$:

$$g(x) = \frac{x^2 \left(m + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{m + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$$

Exercice 2

(1.)

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ car $\Delta < 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

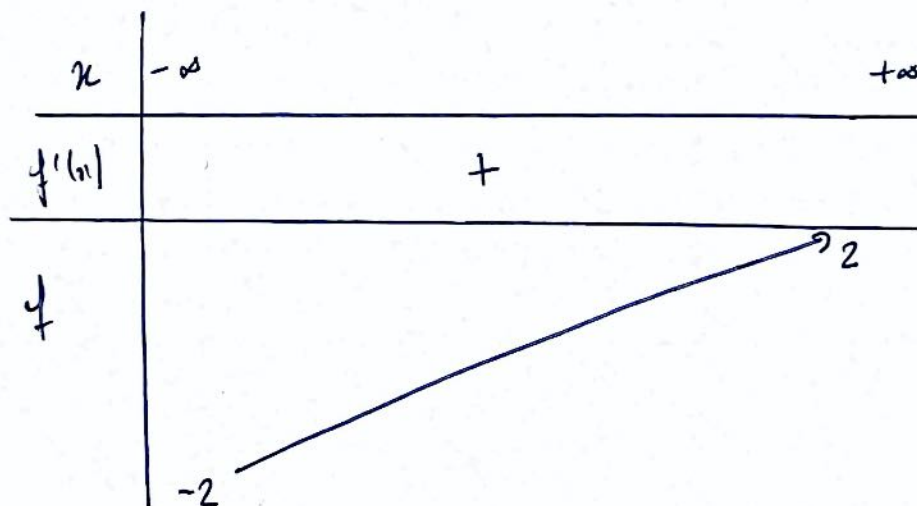
Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - (2x+1) \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{(\sqrt{x^2+x+1})^2}$$

$$= \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{4x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 4x - 1}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

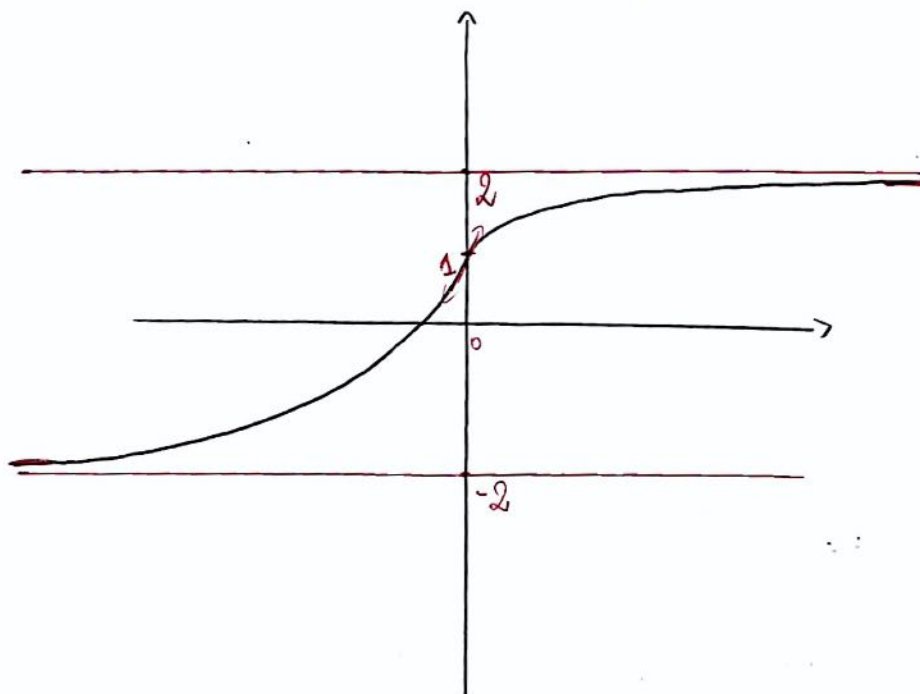
Donc $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$



En l'air fini: $f(x) = \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{|x|} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$

* en $+\infty$: $f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$x \rightarrow -\infty$: $f(x) = -\frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$



- éléments remarquables:
- * asymptote horizontale $y = 2$ en $+\infty$
 - * asymptote horizontale $y = -2$ en $-\infty$
 - * en 0: $f'(0) = \frac{3}{2}$
 $f(0) = 1$

- ②
- f est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$ donc f est bijective sur $\mathbb{R}$.
 - $f(\mathbb{R}) =]-2, 2[$ donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $]-2, 2[$

Conclusion: f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-2, 2[$