DM7 _ corrigé

Première Partie

(1-) $\forall Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on résout $PX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & -2 & -2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b. \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & -2a+c \end{array}\right)$$

donc $rg(P) = 3$ et $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + 3y + z = b. \\ -y + z = a \\ -4z = -2a + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b - 3y - z = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)a + b + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)c = a + b + c \\ y = -a + z = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}c \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

(2.) $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$ diagonale donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}}$

(3.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $M^n = P D^n P^{-1}$.

* $\underline{n=0}$: $M^0 = I$ et $P D^0 P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I$

donc propriété initialisée.

* $\underline{n \geq 0}$: Sq $M^n = P D^n P^{-1}$ à un certain rang n.

$$M^{n+1} = M^n \times M = (P D^n P^{-1}) \times M.$$

Or $D = P^{-1} M P$ donc $PD = MP$ et $PDP^{-1} = M$

donc $M^{n+1} = (P D^n P^{-1})(PDP^{-1}) = P D^n (P^{-1}P) D P^{-1}$
$= P (D^n D) P^{-1}$
$= P D^{n+1} P^{-1}$ ✓

récurrence achevée.

Deuxième Partie

(1.) $\boxed{a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n, C_n forment un SCE

FPT : $P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + 0 \times b_n + P_{C_n}(A_{n+1}) \times c_n.$$

$\underline{\text{Or}}$: si on note $x = P_{C_n}(A_{n+1})$ on a :

$P_{C_n}(C_{n+1}) + P_{C_n}(A_{n+1}) + P_{C_n}(B_{n+1}) = 1 \iff \frac{1}{3} + x + 7x = 1$

$\iff 8x = \frac{2}{3} \iff x = \frac{2}{3 \times 8} = \frac{1}{12}$

Donc : $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{12} c_n.}$

de même : $b_{n+1} = P_{A_n}(B_{n+1})\, a_n + P_{B_n}(B_{n+1})\, P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})\, c_n$

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + 1 \times b_n + \frac{7}{12} c_n}$$

$$c_{n+1} = P_{A_n}(C_{n+1}) \times a_n + P_{B_n}(C_{n+1})\, b_n + P_{C_n}(C_{n+1})\, c_n$$

$$= \frac{1}{3} a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{3} c_n$$

$$\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} c_n}$$

2. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} a_n + 0 b_n + \frac{1}{3} c_n \\ \frac{1}{3} a_n + 1 b_n + \frac{7}{12} c_n \\ \frac{1}{3} a_n + 0 b_n + \frac{1}{3} c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Donc on a bien : $\boxed{X_{n+1} = M X_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Par récurrence sur $n \geq 1$: $X_n = M^{n-1} X_1$!

donc $\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ b_n &= 1 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ c_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}}$

4. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \to +\infty} c_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} b_n = 1}$