Devoir Maison 9

À rendre vendredi 17 avril 2023

Exercice 1 Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs :

$$u_1 = (3, -2, 1) \quad u_2 = (2, -1, 1) \quad u_3 = (-4, 4, -1)$$

On note la famille : $\mathcal{B} =< u_1, u_2, u_3 >$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère les vecteurs :
   - e_1 le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont celles de u_1 , soit :
   $$e_1 = (3, -2, 1)_{\mathcal{B}}$$
   - De même , e_2 le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont celles de u_2 , soit :
   $$e_2 = (2, -1, 1)_{\mathcal{B}}$$
   - Enfin, e_3 le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont celles de u_3 , soit :
   $$e_3 = (-4, 4, -1)_{\mathcal{B}}$$

   Démontrer que la famille $< e_1, e_2, e_3 >$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $< u_1 - \lambda e_1, u_2 - \lambda e_2, u_3 - \lambda e_3 >$ est une base de $\mathbb{R}^3$ sauf pour deux valeurs de λ que l'on précisera.
4. On note F_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :
   $$p = (-1, 1, 0) \quad q = (-6, 2, -2) \quad r = (3, 1, 2) \quad s = (2, 0, 1)$$
   Déterminer une base et la dimension de F_1. On notera $\mathcal{B}_1$ la base obtenue.
5. On note $F_{-1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \text{ et } -x + 2z = 0\right\}$.
   Montrer que F_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base que l'on notera $\mathcal{B}_{-1}$.
6. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x - y) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice qui représente f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. On note la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec :
   $$u_1 = (0, 1, 3) \quad u_2 = (4, 5, 6) \quad u_3 = (-1, 0, 1)$$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice qui représente f dans $\mathcal{B}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer le noyau , l'image et le rang de f.