Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2022/2023
Mme MOREL

DS 6 – MATHÉMATIQUES

mercredi 5 avril 2023

Durée du devoir : 3 heures

***La présentation, la lisibilité,* l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.**

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Exercice 1. (langage `python`)

1. Écrire une fonction `cree` prenant en arguments 4 nombres réels a, b, c, d et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
2. Écrire une fonction `det` prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant son déterminant $\det(A)$.
3. Rappel :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ dans la base canonique. Alors : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det M$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$

On représente en Python les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par une liste contenant leurs coordonnées dans la base canonique. Par exemple le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$ est représenté par la liste `[1,2]`.

En utilisant la fonction `det`, écrire une fonction `colineaires` prenant en argument deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et renvoyant `True` s'ils sont colinéaires et `False` sinon.

Exercice 2. (cours)

1. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^6}$ admet des primitives et les déterminer.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{x}$).

Exercice 3.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\, e^x \, dx\,.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - I_n$

4. (a) On **admet** le résultat suivant :

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

(b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

5. Montrer que : $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Exercice 4.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} u_1 = (1, -1, -1, 1), & u_3 = (3, 0, -1, 1), \\ u_2 = (1, 2, 1, -1), & u_4 = (2, 0, -1, 1) \end{cases} \qquad \text{et} \quad u = (4, 1, -1, 0).$$

On pose :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \text{ tel que } \ x + y - 2z - 2t = 0 \ \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4).$$

1. (a) Montrer que F est un espace vectoriel.
   (b) Donner une base de F et la dimension de F ?
2. (a) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
   (b) Donner une base de G, on notera $\mathscr{G}$ cette famille de vecteurs.
   (c) Quelle est la dimension de G ?
   (d) Déterminer l'ensemble d'équations cartésiennes définissant le sous espace vectoriel G.
   (e) A-t-on $u \in G$? Justifier.

Exercice 5.

Dans cet exercice, on souhaite modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante.

On suppose que l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_e = 100°C$.

L'œuf est constitué de deux compartiments : le blanc et le jaune. Il est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole. Dès lors, on suppose que la chaleur se répartit uniformément à l'intérieur de chaque compartiment et diffuse de l'eau vers le blanc (à travers la coquille) puis du blanc vers le jaune.

On note $T_b(t)$ et $T_j(t)$ les températures respectives du blanc et du jaune à l'instant t (mesurées en minutes). Les fonctions T_b et T_j sont supposées dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

L'œuf est initialement stocké à la température T_0. On a donc $T_b(0) = T_j(0) = T_0$.

Le blanc commence à coaguler à partir de $62°C$ et le jaune à partir de $68°C$.

Cuisson du blanc.

Les lois de la conduction thermique indiquent que la variation de la température dans le blanc est proportionnelle au gradient de température $T_e - T_b$ qui existe entre l'eau et le blanc.

La fonction T_b satisfait donc l'équation différentielle :

$$(E_b) : \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad T_b'(t) = \alpha\,(T_e - T_b(t))\,,$$

où $\alpha > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_b) en tenant compte du fait qu'à l'instant $t = 0$, le blanc est à la température T_0.
2. Donner l'allure du graphe de la fonction $t \longmapsto T_b(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}^+$.

3. (a) L'œuf est initialement stocké à température ambiante $T_0 = 20°C$. Après trois minutes de cuisson, la température de son blanc est de $68°C$. Calculer la valeur du paramètre α et donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   (b) Dans le cas où l'œuf est initialement stocké à la température d'un réfrigérateur, c'est à dire $T_0 = 4°C$, déterminer le temps minimum nécessaire pour que le blanc atteigne la température de $62°C$. On prendra $\alpha = 0{,}3$.
   (c) Un livre indique que, pour obtenir un œuf à la coque, il faut plonger l'œuf trois minutes dans de l'eau bouillante. Commentez.

Cuisson du jaune.

Les lois de la conduction thermique indiquent que la variation de la température dans le jaune est proportionnelle au gradient de température $T_b - T_j$ qui existe entre le blanc et le jaune. La fonction T_j satisfait donc l'équation différentielle :

$$(E_j) : \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad T_j'(t) = \beta\left(T_b(t) - T_j(t)\right),$$

où $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc du jaune. La membrane étant moins épaisse que la coquille, on suppose que $\beta > \alpha$.

1. Démontrer que $T_j'(0) = 0$.
2. Justifier que la fonction T_j' est dérivable et démontrer que T_j satisfait l'équation différentielle :

$$(E_j^*) : \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad T_j''(t) + (\alpha+\beta)\, T_j'(t) + \alpha\beta\, T_j(t) = \alpha\beta\, T_e$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E_j^*) en tenant compte du fait que $T_j(0) = T_0$ et $T_j'(0) = 0$.
4. Donner l'allure du graphe de la fonction $t \longmapsto T_j(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}^+$.
5. On suppose que T_j est définie par : $\quad \forall t \geq 0, \quad T_j(t) = 100 - 80\left(1{,}3e^{-0{,}3t} - 0{,}3e^{-1{,}3t}\right)$. Calculer la température moyenne $\overline{T_j}$ du jaune durant la cuisson de trois minutes, sachant que $\overline{T_j}$ est définie par

$$\overline{T_j} = \frac{1}{3}\int_0^3 T_j(t)\,dt$$

On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près de $\overline{T_j}$.