DS6 - Corrigé
Mercredi 5 Avril 2023.

Exercice 1 :

1.
```
import numpy as np
def cree(a,b,c,d):
    return np.array([ [a,c] , [ b, d] ])
```

2.
```
def det(A):
    return A[0,0] * A[1,1] - A[0,1] * A[1,0]
```

3.
```
def colineaires(u, v):
    A = np.array ([[u[0] , v[0]], [u[1], v[1]]])
    if det(A) == 0 :
        return True
    return False
```

Exercice 2 :

1. On note $f : x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^6}$

f est définie et continue sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

donc f admet des primitives sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

$\forall x \neq -\frac{1}{2}$, $f(x) = (2x+1)^{-6} = \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^{-6}$.

donc les primitives de f sont :

- $\forall x > -\frac{1}{2}$, $F(x) = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{-7}}{-7} + K_1 = -\frac{1}{14}(2x+1)^{-7} + K_1$
- $\forall x < -\frac{1}{2}$, $F(x) = -\frac{1}{14}(2x+1)^{-7} + K_2$

(2.) $I = \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\underset{\substack{u=\sqrt{x} \\ \left(du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right)}}{=\!=} 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos(2u)\,du$$

$$= \Big[\sin(2u)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \sin(2\pi) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{I = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Exercice 3.

(1.) $I_0 = \int_0^1 \frac{(1-x)^0}{0!} e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1$

donc $\boxed{I_0 = e - 1}$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{(1-x)^1}{1!} e^x\,dx = \int_0^1 (1-x)\,e^x\,dx$$

$(x \mapsto 1-x)$ et $(x \mapsto e^x)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par IPP :

$$I_1 = \left[(1-x)\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\,e^x\,dx$$

$$= -1 + \int_0^1 e^x\,dx = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = -1 + e - 1$$

donc $\boxed{I_1 = e - 2}$

(2.) $(x \mapsto -(1-x)^{n+1})$ et $(x \mapsto e^x)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par IPP :

$$\int_0^1 (1-x)^n e^x dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} e^x \, dx.$$

$$= \frac{e^0}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x \, dx$$

donc $I_n = \frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+1)n!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x \, dx$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}}$

(3.) $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k - I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} (I_k - I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$.

(télescopage) $I_0 - I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ $(k' = k+1)$

or $I_0 = e - 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1$

donc : $e - 1 - I_n + 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

soit : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - I_n}$

(4.) (a) $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x \leq 1$

$-1 \leq -x \leq 0$

$0 \leq 1-x \leq 1$ donc $0 \leq (1-x)^n \leq 1$

car $t \mapsto t^n \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

donc $0 \leq (1-x)^n e^x \leq e^x$ car $e^x > 0$

$0 < 1$ donc $0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq \int_0^1 e^x \, dx$

donc $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^x \, dx}$ car $\frac{1}{n!} > 0$

(b) $\frac{1}{n!}\int_0^1 e^x \, dx = \frac{e-1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc par encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

(5.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - I_n$ donc à la limite $(n \to +\infty)$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e}$$

Exercice 4.

(1.)

(a) * $0+0-2\times 0-2\times 0=0$ donc $(0,0,0,0) \in F$

* $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mq $\lambda u + \mu v \in F$

$u = (x,y,z,t) \in F$ donc $x+y-2z-2t=0$.

$v = (a,b,c,d) \in F$ donc $a+b-2c-2d=0$.

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c, \lambda t + \mu d)$$

avec $(\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) - 2(\lambda z + \mu c) - 2(\lambda t + \mu d)$

$= \lambda(x+y-2z-2t) + \mu(a+b-2c-2d)$

$= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$ donc $\lambda u + \mu v \in F$

Conclusion: $\boxed{F \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4 \text{ donc } F \text{ est un } \mathbb{R}\text{ev}}$

(b) $u \in F \iff \exists x,y,z,t \in \mathbb{R}$, $u = (x,y,z,t)$ avec $x+y-2z-2t=0$

$\iff u = (-y+2z+2t, y, z, t)$

$$\iff \quad u = y\underbrace{(-1,1,0,0)}_{v_1 \in F} + z\underbrace{(2,0,1,0)}_{v_2 \in F} + t\underbrace{(2,0,0,1)}_{v_3 \in F}$$

$\iff u \in \text{Vect}\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Donc : $\underline{F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)}$

. Etude de la liberté : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ quelconques tq.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\underline{\langle v_1, v_2, v_3\rangle \text{ est libre}}$

. Conclusion : $\boxed{\langle v_1, v_2, v_3\rangle \text{ est une base de } F \text{ et } \dim F = 3.}$

2.

(a) On remarque que $u_2 + 2u_1 = u_3$.

donc <u>la famille $\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$ n'est pas libre</u>

(b) $u_3 = u_2 + 2u_1$ donc $G = \text{Vect}\langle u_1, u_2, u_4\rangle$.

étude de la liberté : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ quelconques tq

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\begin{array}{l} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}} \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -2\lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\underline{(u_1, u_2, u_4)}$ est libre

Donc c'est une base de G. $\quad \boxed{\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_4)}$

(c) $\mathcal{G}$ est une base de G donc $\boxed{\dim G = 3}$

(d) $v = (x, y, z, t) \in G = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$

$\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \,/\, v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_4$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = z \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = t \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = x + y \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = x + z \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = -x + t \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = x + y \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = x + z \\ 0 = z + t \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ ③ \ \lambda_2 + 2\lambda_3 = x+y \\ ④ \ \lambda_3 = x - 2y + 3t \quad L_4 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \\ \boxed{0 = z+t} \end{cases}$$

Donc (S) est compatible ssi $z+t=0$

<u>Conclusion:</u> $\boxed{F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / z+t=0\}}$

(e) $u = (4, 1, -1, 0)$ avec $-1+0 \neq 0$

donc $\boxed{u \notin G.}$

<u>Exercice 5</u>

<u>Cuisson du blanc:</u>

1. T_b est sol° de : $\begin{cases} y' + \alpha y = \alpha T_e \ (E_b) \\ y(0) = T_0. \end{cases}$

- (H) $y' + \alpha y = 0$

les sol° de (H) sont de la forme : $y_H(t) = Ke^{-\alpha t}$, $\forall t \geq 0$.

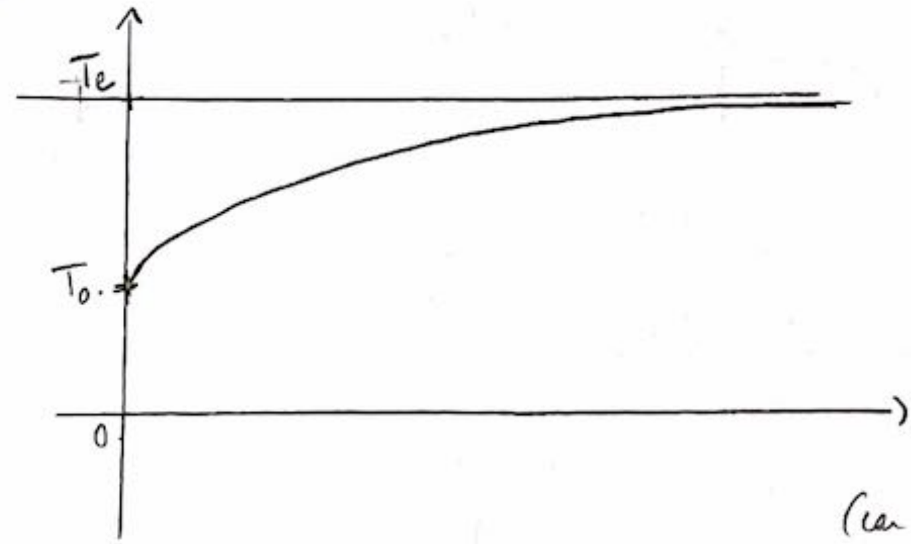
- une sol° particulière est $y_p(t) = T_e \quad \forall t \geq 0$

Donc les sol° sont de la forme : $y(t) = Ke^{-\alpha t} + T_e$

or $y(0) = T_0$ donc $K + T_e = T_0 \Leftrightarrow K = T_0 - T_e$

<u>Conclusion:</u> $\boxed{\forall t \geq 0, \ T_b(t) = (T_0 - T_e)e^{-\alpha t} + T_e}$

(2.)



(car $T_0 < T_e$)

(3.) (a) On a $T_b(3) = 68 \iff (20-100)\,e^{-3\alpha} + 100 = 68$

$$\iff -80\,e^{-3\alpha} = 68 - 100 = -32$$

$$\iff e^{-3\alpha} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$

$$\iff -3\alpha = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\iff \boxed{\alpha = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \quad \text{donc } \boxed{\alpha \simeq 0{,}305}$$

(b)

On cherche t tq $T_b(t) = 62$

$$\iff (4-100)\,e^{-0{,}3t} + 100 = 62$$

$$\iff -96\,e^{-0{,}3t} = 62 - 100 = -38$$

$$\iff e^{-0{,}3t} = \frac{38}{96} = \frac{19}{48}$$

$$\iff -0{,}3t = \ln\left(\frac{19}{48}\right)$$

$$\iff \boxed{t = -\frac{1}{0{,}3}\ln\left(\frac{19}{48}\right) \simeq 3 \text{ min}}$$

(C) V

Cuisson du jaune :

1. $T_j'(0) = \beta(T_b(0) - T_j(0))$
$= \beta(T_0 - T_0)$ donc $\boxed{T_j'(0) = 0}$

2. $\forall t \geqslant 0, \quad T_j'(t) = \beta(T_b(t) - T_j(t))$

T_b et T_j étant dérivables, par somme, T_j' l'est aussi et :

$$T_j''(t) = \beta(T_b'(t) - T_j'(t))$$
$$= \beta\left[\alpha T_e - \alpha T_b(t) - \beta T_b(t) + \beta T_j(t)\right]$$
$$= \alpha\beta T_e - \beta(\alpha+\beta) T_b(t) + \beta^2 T_j(t)$$
$$= \alpha\beta T_e - \beta^2(T_b(t) - T_j(t)) - \alpha\beta T_b(t)$$
$$= \alpha\beta T_e - \beta\, T_j'(t) - \alpha\left(T_j'(t) + \beta T_j(t)\right)$$
$$= \alpha\beta T_e - (\alpha+\beta) T_j'(t) - \alpha\beta T_j(t)$$

Conclusion : $T_j''(t) + (\alpha+\beta) T_j'(t) + \alpha\beta T_j(t) = \alpha\beta T_e \quad \forall t \geqslant 0$

3. T_j est solution de : $\begin{cases} y'' + (\alpha+\beta) y' + \alpha\beta y = \alpha\beta T_e. \\ y(0) = T_0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

- Équation caractéristique : $r^2 + (\alpha+\beta) r + \alpha\beta = 0.$

$r^2 - Sr + P$ où $P = \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$
et $S = -(\alpha+\beta) = (-\alpha) + (-\beta)$

donc les racines sont $(-\alpha)$ et $(-\beta)$.

donc les sol° de (H) sont de la forme :

$$y_H(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \quad , \forall t \geq 0.$$

- une sol° particulière est $y_p(t) = T_e$, $\forall t \geq 0$

- Conclusion : les sol° sont de la forme.

$$y(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} + T_e , \forall t \geq 0$$

or $\begin{cases} y(0) = \lambda + \mu + T_e = T_0 \\ y'(0) = \alpha\lambda + \mu\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = T_0 - T_e \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0. \end{cases}$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda + \mu = T_0 - T_e \\ (\beta - \alpha)\mu = -\alpha(T_0 - T_e) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = T_0 - T_e - \mu = T_0 - T_e - \frac{\alpha(T_0 - T_e)}{\alpha - \beta} = \frac{-\beta}{\alpha - \beta}(T_0 - T_e) \\ \mu = \frac{\alpha(T_0 - T_e)}{\alpha - \beta} \end{cases}$ car $\beta > \alpha$ donc $\beta \neq \alpha$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall t \geq 0, \quad y(t) = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(T_0 - T_e)\, e^{\alpha t} + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(T_0 - T_e)\, e^{\beta t}}$

(5.) $$\overline{T_j} = \frac{1}{3}\left[100 \times 3 - 80\left[\frac{1,3}{-0,3}\, e^{-0,3t} - \frac{0,3}{-1,3}\, e^{-1,3t}\right]_0^3\right]$$

$$= 100 - 80\left(-\frac{1,3}{0,3}\, e^{-3\times 0,3} + \frac{0,3}{1,3}\, e^{-3\times 1,3} - \frac{1,3}{0,3} - \frac{0,3}{1,3}\right)$$

$$\boxed{\overline{T_j} = 100 - 80\left(-\frac{13}{3}\, e^{-0,9} + \frac{3}{13}\, e^{-3,9} - \frac{13}{3} + \frac{3}{13}\right)}$$

donc $\overline{T_j} \simeq$