Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2022/2023
Mme MOREL

DS 7 – MATHÉMATIQUES

mercredi 10 mai 2023

Durée du devoir : 3 heures

***La présentation, la lisibilité,* l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.**

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Les téléphones portables doivent être éteints.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

Le devoir est composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Exercice 1.

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad v_n = \frac{\sqrt{n}\,\ln(n^2) - \ln(n)}{\mathrm{e}^n + 2}$$

Exercice 2.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante. Cette suite admet-elle une limite ?
3. Démontrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
   On pourra raisonner par l'absurde

Exercice 3.

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 5^n - n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, la déterminer.

Exercice 4.

On considère la série harmonique , c'est-à-dire la suite (H_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1\,,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$,
   (a) $\ln(1+x) \leqslant x$,
   (b) $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$

2. En déduire que : $\forall n \geqslant 1$,

$$H_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant H_n$$

3. Établir alors que : $\forall n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

4. Déterminer la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
   (a) Étudier la monotonie de la suite (S_n).
   (b) Prouver que : $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
   (c) En déduire que la suite (S_n) converge.
6. Déduire des questions précédentes que $H_n \sim \ln(n+1)$.
   On pourra montrer que le quotient tend vers 1 *quand* n *tend vers* $+\infty$
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$
8. En déduire un équivalent simple de la série harmonique.

Exercice 5.

On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+2y+3z+4t, x+4y+2z+3t, 2x+6y+5z+7t) \end{array}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer la matrice qui représente φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer base et dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On notera $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ cette base.
   φ est-elle injective ? Justifier.
4. Déterminer base et dimension de $\Im(\varphi)$. On notera $\mathcal{B}_{\Im}$ cette base.
   φ est-elle surjective ? Justifier.
5. (a) Pour chaque vecteur v de $\Im(\varphi)$, déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(u) = v$.
   On notera $\mathcal{B}'_{\Im}$ la famille de vecteurs obtenue.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ et ceux de $\mathcal{B}'_{\Im}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (c) Déterminer la matrice qui représente φ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.