

Exercice 1

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n) \left(1 + \frac{1}{2^n \ln(n)}\right)} = \frac{n^{1/2}}{\ln(n)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{2^n \ln(n)}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

Par C.C.: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/2}}{\ln(n)} = +\infty$. (car $n \rightarrow +\infty$
donc $n > 1$
donc $\ln(n) > 0$)

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{2\sqrt{n} \ln(n) - \ln(n)}{e^n + 2} = \frac{\sqrt{n}}{e^n} \times \frac{2\ln(n) - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}{1 + 2e^{-n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{e^n} \times \underbrace{\frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + 2e^{-n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{e^n} = \frac{n \ln(n) e^{-n}}{\sqrt{n}} = (n e^{-n}) \times \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

par C.C.: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$

Exercice 2:

①. Par récurrence immédiate: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

(2.)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \geq \sqrt{u_n^2}$$

$$\text{en effet: } u_n + u_n^2 \geq 1 + u_n^2 \geq u_n^2 \geq 0$$

et la racine est l'identité

$$\text{or } u_n \geq 0 \text{ donc } \sqrt{u_n^2} = |u_n| = u_n$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante}$$

Puisque (u_n) est croissante, elle admet une limite l ;

$l \in \mathbb{R}$ ou $l = +\infty$.

(3.) Par l'absurde, supposons que $l \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1 \text{ donc } l \geq 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \quad \text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + u_n^2} = \sqrt{l + l^2} \quad (l + l^2 \geq 0)$$

$$\text{donc à la limite: } l = \sqrt{l + l^2}$$

$$\Leftrightarrow l^2 = l + l^2 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est injective sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \sqrt{l + l^2} \geq 0 \text{ et } l \geq 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow l = 0: \text{absurde, puisque } l \geq 1.$$

Conclusion: $l \notin \mathbb{R}$ donc $l = +\infty$.

(u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \sqrt{2n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty.$$

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= 5^{2n+1} - (2n+1) = 5^{2n+1} - 2n - 1 \\ &= 5 \times 25^n - 2n - 1 \\ &= 25^n \left(5 - 2 \frac{n}{25^n} \right) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Par C.C: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{25^n} = 0$$

$$(\text{car } 25 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 25^n = +\infty)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = +\infty$$

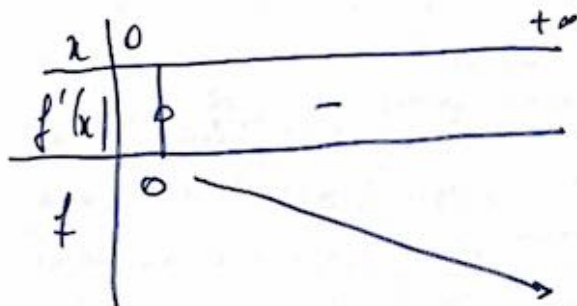
Conclusion:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 4:

① (a) On considère $f(x) = \ln(1+x) - x, \forall x \geq 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0: f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$



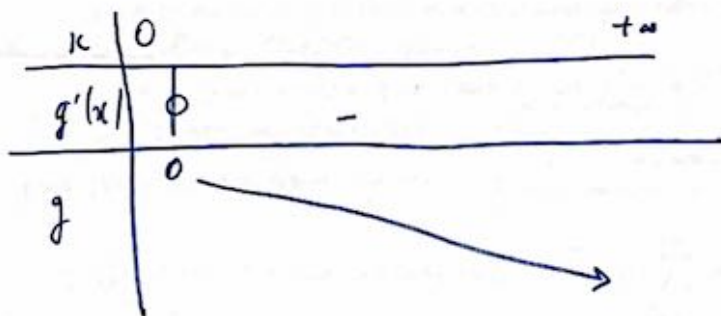
Donc $\forall x \geq 0, f(x) \leq 0$:

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$$

(b) On considère $g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x), \forall x \geq 0$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0: g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+x - x(1+x) - 1}{1+x} \\ &= \frac{x - x - x^2}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0 \end{aligned}$$



Donc: $\forall x \geq 0, g(x) \leq 0$

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

② $\forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq 0$ donc on applique les résultats précédents:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \right)}_{H_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{H_n}$$

Conclusion: $\forall n \geq 1, \quad H_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq H_n$

(3.)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\ln(n+k) - \ln(k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \quad \text{somme télescopique.} \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

Donc: $H_n > \ln(n+1)$ et $H_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \ln(n+1)$
 donc $H_n \leq \ln(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

Conclusion: $\forall n \geq 1,$

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

(4.) $\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq H_n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$
 donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$

(5.) (a) $\forall n \geq 1, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (S_n) est croissante

(b) $\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2 - k}$

$$\text{or } h^2 - h \leq h^2 \quad \text{donc } \frac{1}{h^2 - h} \geq \frac{1}{h^2}$$

Conclusion: $\boxed{\frac{1}{h^2} \leq \frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}}$

$$(c) \quad \forall n \geq 2, \quad S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\text{or } \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

Somme télescopique.

donc $\forall n \geq 1, \quad S_n \leq 2.$

Conclusion: (S_n) est f. et majorée (par 2) donc (S_n) converge

(6.) D'après (3), puisque $\ln(n+1) > 0$ (n aussi grand que l'on veut car $n \rightarrow +\infty$)

$$1 \leq \frac{H_n}{\ln(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{2} \frac{S_n}{\ln(n+1)}$$

or (S_n) converge donc sa limite est réelle donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n+1)} = 0$

donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n+1)} = 1$

Conclusion: $\boxed{H_n \sim \ln(n+1)}$

(7.) $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1}$

$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

8. la question précédente nous donne: $\ln(n+1) \sim \ln(n)$
 donc d'après (6), $H_n \sim \ln(n)$

Exercice 5

(1.) $\forall u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \forall v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,$
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$

$$\text{on a } \varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u + \mu v) &= ((\lambda x + \mu a) + 2(\lambda y + \mu b) + 3(\lambda z + \mu c) + 4(\lambda t + \mu d), (\lambda x + \mu a) + 4(\lambda y + \mu b) \\ &\quad + 2(\lambda z + \mu c) + 3(\lambda t + \mu d), 2(\lambda x + \mu a) + 6(\lambda y + \mu b) + 5(\lambda z + \mu c) + 7(\lambda t + \mu d)) \\ &= (\lambda(x + 2y + 3z + 4t) + \mu(a + 2b + 3c + 4d), \lambda(x + 4y + 2z + 3t) + \mu(a + 4b + 2c + 3d), \\ &\quad \lambda(2x + 6y + 5z + 7t) + \mu(2a + 6b + 5c + 7d)) \\ &= \lambda \underbrace{(x + 2y + 3z + 4t, x + 4y + 2z + 3t, 2x + 6y + 5z + 7t)}_{\varphi(u)} \\ &\quad + \mu \underbrace{(a + 2b + 3c + 4d, a + 4b + 2c + 3d, 2a + 6b + 5c + 7d)}_{\varphi(v)} \end{aligned}$$

Donc : φ est linéaire.

(2.) $\varphi(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2)$
 $\varphi(0, 1, 0, 0) = (2, 4, 6)$
 $\varphi(0, 0, 1, 0) = (3, 2, 5)$
 $\varphi(0, 0, 0, 1) = (4, 3, 7)$

donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

3.)

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(u) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + 6y + 5z + 7t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2y - z - t = 0 \\ 2y - z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - 4t = (-2 - 6)y + (-4 + 3)t = -8y - t \\ z = 2y - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (-8y - t, y, 2y - t, t) = y \overbrace{(-8, 1, 2, 0)}^{u_1} + t \overbrace{(-1, 0, -1, 1)}^{u_2}$$

$$\Leftrightarrow u \in \text{Vect} \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect} \langle u_1, u_2 \rangle. \quad u_1, u_2 \text{ non colinéaires}$$

$$\text{donc } \mathcal{B}_{\text{Ker}} = \langle (-8, 1, 2, 0), (-1, 0, -1, 1) \rangle \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi) \quad \text{donc famille libre}$$

\$\varphi\$ non surjective.
car \$\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}\$

et \$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2\$

4.)

$$\text{Im} \varphi = \text{Vect} \langle (1, 1, 2), (2, 4, 6), (3, 2, 5), (4, 3, 7) \rangle.$$

or: $(4, 3, 7) = (1, 1, 2) + (3, 2, 5)$

$$\text{donc } \text{Im}(\varphi) = \text{Vect} \langle (1, 1, 2), (2, 4, 6), (3, 2, 5) \rangle.$$

$$(3, 2, 5) = 4(1, 1, 2) - \frac{1}{2}(2, 4, 6)$$

$$\text{donc } \text{Im}(\varphi) = \text{Vect} \langle \underbrace{(1, 1, 2)}_{u_1}, \underbrace{(2, 4, 6)}_{u_2} \rangle$$

$\langle u_1, u_2 \rangle$ est libre
donc c'est une base de
 $\text{Im}(\varphi)$

$$\text{donc } \dim(\varphi) = 2$$

$$\text{et } \mathcal{B}_{\text{Im}} = \langle (1, 1, 2), (2, 4, 6) \rangle$$

φ non surjective car $\text{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}^3$ (dimension...) - 7 -

(5) (a) on sait que $\varphi(1, 0, 0, 0) = v_1$ donc on prend $u_3 = (1, 0, 0, 0)$
 $\varphi(0, 1, 0, 0) = v_2$ donc on prend $u_4 = (0, 1, 0, 0)$

donc $\mathcal{B}'_{\text{Im}} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$

(b) $\mathcal{B} = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$

$= \langle (-8, 1, 2, 0), (-1, 0, -1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$.

puisque $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^4)$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

Soit la matrice qui représente $\mathcal{B}$ dans la base canonique:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 8L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \textcircled{4}$$

Conclusion: $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

(c) $\varphi(u_1) = (0, 0, 0)$ et $\varphi(u_2) = (0, 0, 0)$ puisque $u_1, u_2 \in \text{Ker}(\varphi)$
 $\varphi(u_3) = v_1 = (1, 1, 2)$ et $\varphi(u_4) = v_2 = (2, 4, 6)$

Conclusion:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$