

Exercice 1

(1) $\alpha > 0$

(a)

$\alpha > 0$ donc $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

$\forall n \geq 1,$

$$1 \leq k \leq n$$

$$1^\alpha \leq k^\alpha \leq n^\alpha$$

$$0 < 1+n^\alpha \leq k^\alpha + n^\alpha \leq 2n^\alpha$$

$$\frac{1}{2n^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \leq \frac{1}{1+n^\alpha}$$

donc en sommant,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^\alpha} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+n^\alpha}$$

$$\frac{n}{2n^\alpha} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^\alpha}$$

Conclusion:

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{n^{1-\alpha}}{2} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^\alpha}$$

(b)

$$n^\alpha = e^{\alpha \ln(n)}$$

$\alpha > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$.

$$\frac{n}{1+n^\alpha} \sim \frac{n}{n^\alpha} \quad n \quad \frac{n}{n^\alpha} = n^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha) \ln(n)}$$

si $n^\alpha > 1$: $1-\alpha < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(1-\alpha) \ln(n)} = 0$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

si $n^\alpha < 1$: $1-\alpha > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2} = +\infty$

donc par comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

(2) $\alpha = 1$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad (k'=k+1)$

$$= \frac{1}{n+2+n} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{n+n} \quad (\text{Abcèsage})$$

$$= \frac{2n+1 + 2(n+1) - 2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{4n+1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$$

Donc (u_n) est croissante

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $u_n \leq \frac{n}{1+n} \leq 1 \quad (1.11)$

donc (u_n) est majorée par 1 et est croissante

donc (u_n) converge.

(c) $\forall x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \ln(1+x) - x$. Étudions.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$$

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	-
f			

donc $f(x) \leq 0$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) \leq x$$

$\forall x \in]-1, 1[, -x \in]-1, 1[$ donc $f(-x) \leq 0$: $\ln(1-x) \leq -x$

donc $-\ln(1-x) \geq x$

(d)

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, -1 \leq \frac{1}{k+n} \leq 1$$

donc: $\ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) \leq \frac{1}{k+n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right)$

donc en sommant:

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) \leq u_n \leq -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right)$$

on: $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(n+k+1) - \ln(k+n))$

$$\stackrel{\text{téléscopage}}{=} \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(n+k-1) - \ln(k+n))$$

$$\stackrel{\text{téléscopage}}{=} \ln(n) - \ln(2n) = \ln\left(\frac{n}{2n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln(2)$

(e)

$$\frac{2n+1}{n+1} \sim \frac{2n}{n}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$

donc par encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$$

Exercise 2: $(x \rightarrow \infty)$

$$f(x) = \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^x - 1 = e^{x \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)} - 1$$

$$\frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+3}{x^2-1} = 1 + \frac{3}{x^2-1} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2-1} = 0$$

$$\text{donc} \quad \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right) = \ln \left(1 + \frac{3}{x^2-1} \right) \sim_{+\infty} \frac{3}{x^2-1}$$

$$\text{donc} \quad x \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right) \sim_{+\infty} \frac{3x}{x^2-1} \sim \frac{3x}{x^2}$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right) = 0$$

$$\text{donc} \quad e^{x \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)} - 1 \sim_{+\infty} x \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right) \sim \frac{3}{x}$$

Conclusion:

$$\boxed{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^x - 1 \sim \frac{3}{x}}$$