

# I - Étude de f.

①.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

f dérivable et  $\forall x \neq 3, f'(x) = \frac{1 \cdot x(x-3) - (x-4) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(x-3)^2} > 0$

donc,

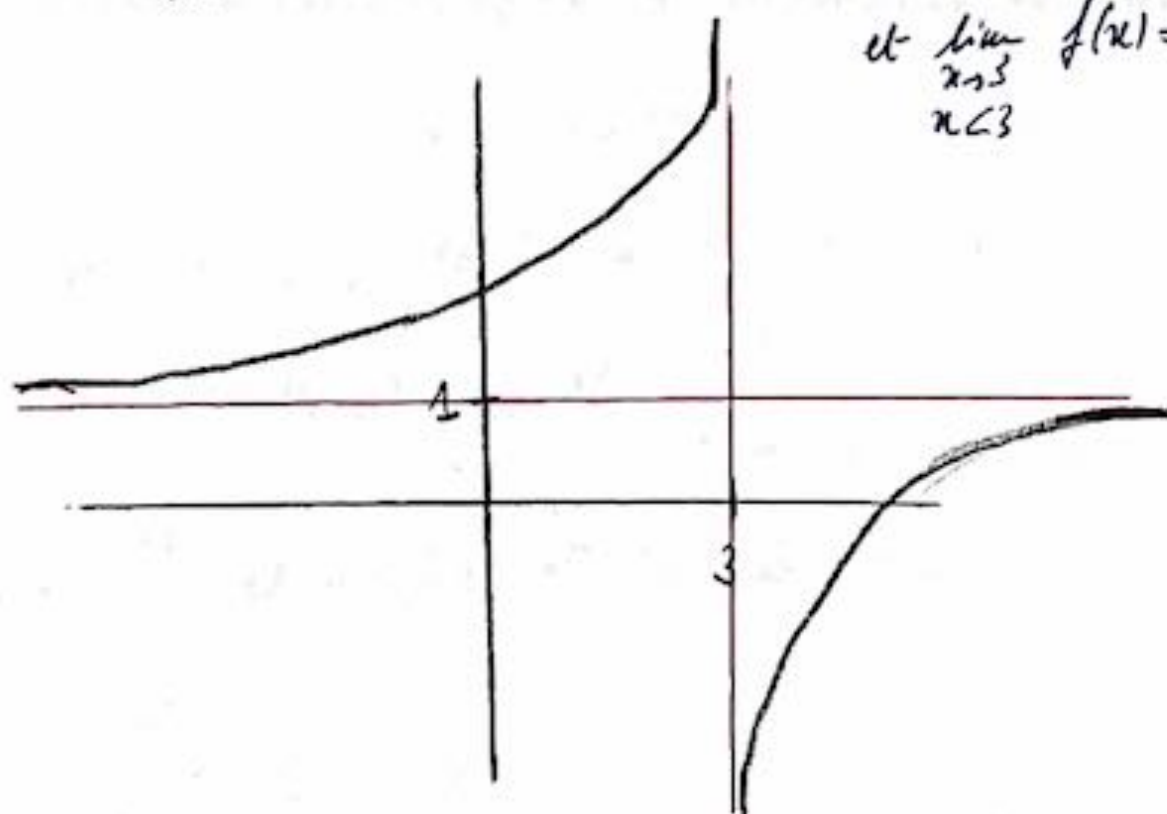
| x       | $-\infty$ | 3         | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +         | +         |
| f       | 2         | $+\infty$ | 1         |

en  $-\infty$ :  $f(x) \sim \frac{x}{x}$

en 3:  $\lim_{x \rightarrow 3} x-4 = -1 < 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$   
 $x < 3$



②. f  $\nearrow$  sur  $] -\infty, 3[$  donc  $\forall x < 2, f(x) < f(2)$

or  $f(2) = \frac{2-4}{2-3} = 2$

Conclusion:

$\forall x \in ] -\infty, 2[, f(x) < 2$

## II - Convergence de $(u_n)$

(1.)  $(u_n)$  bien définie  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 3$ .

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_n < 2$  (donc  $(u_n)$  sera bien définie)

$n=0$ :  $u_0 = 1 < 2 \quad \checkmark$

$n \geq 0$   $\exists \frac{1}{\epsilon} u_n < 2$  à un certain rang  $n$ .

$\text{Rq: } u_{n+1} < 2.$

$u_{n+1} = f(u_n)$  d'où d'après I-2  $f(u_n) < 2$  car  $u_n < 2$  (H.P.)

donc  $u_{n+1} < 2 \quad \checkmark.$

récurrence achevée.

(2.) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} \geq u_n$ .

$n=0$ :  $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1-4}{1-3} = \frac{3}{2} \geq 1 \quad \checkmark$

$n \geq 0$   $\exists \frac{1}{\epsilon} u_{n+1} \geq u_n$  à un certain rang  $n$ .

donc  $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$  car  $f \uparrow$  sur  $] -\infty, 3[$  et  $u_n, u_{n+1} < 2$

donc  $u_{n+2} \geq u_{n+1} \quad \checkmark$

récurrence achevée.

Donc  $(u_n)$   $\boxed{\text{P}}$  et majorée par 2 donc  $(u_n)$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$  avec  $\boxed{l \leq 2}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$

donc à la limite:  $l = \frac{l-4}{l-3} \quad (l \neq 3)$

$\Leftrightarrow l(l-3) = l-4$

$\Leftrightarrow l^2 - 2l + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (l-2)^2 = 0$

on  $l=2$

Conclusion:  $\boxed{(u_n) \text{ vers } 2}$

III - En fait:

(1)  $\forall n \neq 3, f(x) = x \quad (\Rightarrow x = 2 \text{ (cf II.3 !!)})$   
donc  $\boxed{\alpha = 2}$

(2) (a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2 \quad (\text{I.2}) \text{ donc } u_n \neq \alpha$   
donc  $(v_n)$  bien définie,

(5)  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} - \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 2} - 2} - \frac{1}{u_n - 2}$   
$$= \frac{u_n - 3}{u_n - 4 - 2u_n + 6} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 3}{-u_n + 2} - \frac{1}{u_n - 2}$$
$$= \frac{-u_n + 3 - 1}{u_n - 2} = \frac{2 - u_n}{u_n - 2} = \boxed{-1}$$

Conclusion:  $(v_n)$  est arithmétique, de raison  $-1$ , de premier terme  
$$v_0 = \frac{-1}{u_0 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = -1.$$

(c)  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 - n = \frac{1}{u_n - 2}$   
donc  $u_n - 2 = -\frac{1}{1+n}$

$$u_n = -\frac{1}{1+n} + 2$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 + 2n}{1+n}$$