Devoir Maison 11

À rendre vendredi 2 juin 2023

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$\forall x \neq 3\,,\ f(x) = \frac{x-4}{x-3}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n$$

I. Étude de f

1. Établir le tableau de variations de f et tracer son allure graphique sur son ensemble de définition.
2. Montrer que : $\forall x \in]-\infty, 2[,\ f(x) < 2$.

II. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n < 2$
2. Tracer le dynamisme de la suite et émettre des conjectures sur sa monotonie et sa convergence.
3. Démontrer vos conjectures.

III. Mais en fait ...

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. On note α sa solution. Donner la valeur de α.
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.