Résolution d'équations - inéquations

I. Équations.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $3(2-7x) = 4-(2x+1)$
2. $(3x-1)(2+3x) = (3x-5)^2$
3. $(3x+7)^2 = (7x+10)^2$
4. $x^2 - 2\sqrt{2}x = -2$
5. $9-4x^2-(5-x)(3-2x) = 0$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $9 - \dfrac{2x+7}{3} = \dfrac{4x}{6} - \dfrac{1}{3}$
2. $\dfrac{3x+1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{3}x - 1 + 2x$
3. $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}} + x = 0$
4. $1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4(x^2-2)}{x(4x+8)}$
5. $1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$
6. $\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x-1} = 2 - x + x^2$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
2. $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$
3. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 6 = 0$

II. Inéquations.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $5x\,(3x+4)\,(4x+10) \leqslant 0$
2. $(5+x)^2 - (3x-4)(5+x) \leqslant 0$
3. $16 - x^2 - (4-x)(8-3x) \geqslant 0$
4. $2x^2 - 4x - 6 \geqslant 0$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{2-x}{6x-4} < 3$
2. $\dfrac{5-4x}{9x+6} > \dfrac{4x+9}{9x+6}$
3. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{5x-2}{x(x+1)}$
4. $\dfrac{3}{3-x} + \dfrac{1}{x+3} \leqslant \dfrac{4x}{9-x^2}$

III. Équations avec paramètre.

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

1. $(m^2+m)\,x = 2m\,x + m^3 - 1$
2. $(m+2)\ + 3m + 1 + \dfrac{m^2-6m}{2}\,x = \dfrac{7m}{2}$
3. $\dfrac{m}{x-m} + \dfrac{2m}{x+m} = \dfrac{3}{x^2-m^2}$

Exercice 7 :

1. Discuter, suivant les valeurs du réel m, l'existence des racines réelles de l'équation:

$$x^2 - (m+3)\,x + (3m+1) = 0\,.$$

2. Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$.