

DS 1 – Mathématiques

Mercredi 20 Septembre 2023

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique). :

1. Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie la valeur de :

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{1 + x^2}.$$

Écrire une instruction qui permet d'affecter à une variable `resultat` la valeur $f(10)$.

2. On tape dans l'éditeur :

```
def mystere(n):  
    u=-2  
    u=u**n  
    n=n+1  
    return u**n
```

Et on appelle `mystere(2)` dans la console.

Expliquer, en détaillant chaque étape de la fonction, le résultat renvoyé par l'ordinateur.

3. On tape le script suivant dans l'éditeur :

```
x=2 ; y=5 ; z=x  
x=y  
y=z
```

Quelles sont les valeurs de x et y à la fin de ce programme ? On justifiera soigneusement sa réponse.

Exercice 2. On se donne deux réels a et b tels que :

$$1 < a < 3 \quad \text{et} \quad -2 < b < 1$$

Donner un encadrement de :

1. $a + b$

3. ab

5. $(a - 4)^2$

7. $\frac{a}{2 - b}$

2. $a - b$

4. a^2

6. $\frac{b + 3}{a}$

8. $\sqrt{a(b + 2)^2}$

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $(2 - 3x)^2 = (1 - x)^2$
2. $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$,
3. $\frac{1+x}{1-\frac{x}{x+1}} < (2x-3)^2$.

Exercice 4. Pour tout nombre réel m , on cherche à déterminer le nombre de racines réelles du polynôme P_m défini sur \mathbb{R} par

$$P_m(x) = (m+2)x^2 + 2(2m+1)x + m+2.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m P_m n'est pas un trinôme du second degré?

On suppose dans la suite que m est différent de cette valeur.

2. Calculer le discriminant Δ_m de P_m en fonction de m .
3. Étudier le signe de Δ_m en fonction de m .
4. Conclure quant au nombre de racines réelles de P_m en fonction de m .

Exercice 5. :

1. Vérifier le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1}$$

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$