DS1 - Corrigé
Mercredi 20/09/2023.

Exercice 2

1. $\left.\begin{array}{l} 1<a<3 \\ -2<b<1 \end{array}\right\}$ donc, $\boxed{-1<a+b<4}$

2. $\left.\begin{array}{l} 1<a<3 \\ -2<b<1 \text{ donc } -1<-b<2 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{0<a-b<5}$

3. $-2<b<1$ et $a>0$ donc $-2a<ab<a$

   $1<a<3$ donc $-6<-2a<-2$

   Conclusion: $\boxed{-6<ab<3}$

4. $1<a<3$

   et $(x\mapsto x^2)$ $\nearrow$ sur $[0,+\infty[$ et $1, a, 3 \in [0,+\infty[$

   donc $\boxed{1<a^2<9.}$

5. $1<a<3$ donc $-3<a-4<-1$.

   $(x\mapsto x^2)$ $\searrow$ sur $]-\infty,0]$ et $-3, a-4, -1 \in]-\infty,0]$

   donc $\boxed{1<(a-4)^2<9}$

6. $1<a<3$

   $\left(x\mapsto \frac{1}{x}\right)$ $\searrow$ sur $]0,+\infty[$ et $1, a, 3 \in]0,+\infty[$

   donc $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}<1$

   $-2<b<1$ donc $1<b+3<4$ donc $b+3>0$

   donc $\frac{b+3}{3}<\frac{b+3}{a}<b+3$.

   conclusion: $\boxed{\frac{1}{3}<\frac{b+3}{a}<4}$

7.

$$-2 < b < 1$$
$$-1 < -b < 2$$
$$1 < 2-b < 4$$

$\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ ⇓ sur $]0,+\infty[$ et $1, 2-b, 4 \in]0,+\infty[$ donc :

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2-b} < 1$$

$a > 0$ donc $$\frac{a}{4} < \frac{a}{2-b} < a$$

or $1 < a < 3$.

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{4} < \frac{a}{2-b} < 3}$

8.

$-2 < b < 1$ donc $0 < b+2 < 3$.

$(x \mapsto x^2)$ ⇑ sur $\mathbb{R}_+$ et $0, b+2, 3 \in \mathbb{R}_+$ donc :

$$0 < (b+2)^2 < 9$$

$a > 0$ donc $$0 < a(b+2)^2 < 9a < 27$$

$(x \mapsto \sqrt{x})$ ⇑ sur $[0,+\infty[$ et $0, a(b+2)^2, 27 \in [0,+\infty[$

donc $\boxed{0 < \sqrt{a(b+2)^2} < \sqrt{27}}$

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(2-3x)^2 = (1-x)^2 \iff (2-3x)^2 - (1-x)^2 = 0$$
$$\iff (2-3x-1+x)(2-3x+1-x) = 0$$
$$\iff (-2x+1)(-4x+3) = 0$$
$$\iff -2x+1 = 0 \text{ ou } -4x+3 = 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}}$

(2.) On résout sur $\mathbb{R}$.

Posons $X = x^2 \in [0,+\infty[$

alors (2) $\iff X^2 - 4X - 5 = 0$

-1 est racine évidente, l'autre est 5

donc (2) $\iff X = -1 \notin [0,+\infty[$ ou $X = 5 \geq 0$

$\iff x^2 = 5$

$\iff x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}}$

(3.) Ensemble de résolution : $x+1 \neq 0$ et $1 - \frac{x}{x+1} \neq 0$.

$\forall x \neq -1, \quad 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \neq 0$

donc on résout sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

(3) $\iff \dfrac{1+x}{\frac{1}{x+1}} < (2x-3)^2 \iff (1+x)^2 < (2x-3)^2$

$\iff (2x-3)^2 - (1+x)^2 > 0$

$\iff (2x-3-1-x)(2x-3+1+x) > 0$

$\iff (x-4)(3x-2) > 0$

x	$-\infty$		$2/3$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(3x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup]-1, \tfrac{2}{3}[\cup]4, +\infty[}$

Exercice 4

1. P_m est de degré ≤ 1 si $m+2=0$ si $\boxed{m=-2}$

2.
$$\begin{aligned}
\Delta_m &= \left(2(2m+1)\right)^2 - 4(m+2)(m+2)\\
&= 4(2m+1)^2 - 4(m+2)^2\\
&= 4\left[(2m+1)^2 - (m+2)^2\right]\\
&= 4(2m+1-m-2)(2m+1+m+2)\\
&= 4(m-1)(3m+3)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\Delta_m = 12(m-1)(m+1) = 12(m^2-1)}$

3.

m	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
Δ_m		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Si $m \neq -2$:

m	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
nb de racines réelles		2	$\Vert$	2	1	0	1	2	

Si $m=-2$: $P_m = -6x$ donc $\boxed{P_m \text{ a une seule racine réelle}}$

Exercice 5

(1.) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2$$
$$=n+1-n=1$$

or $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\neq 0$ donc $\boxed{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$

(2.) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+1}$

* $\underline{n=0}$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}=1\\ \text{et } \sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1\end{array}\right\}\ \checkmark$$

* $\underline{n\geq 0}$:

Sq $\exists n\in\mathbb{N}$ / $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+1}$.

Mq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+2}$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

$$=\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \quad \text{d'après (HR)}$$

$$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \quad \text{d'après (1)}$$

$$=\sqrt{n+2}.\ \checkmark$$

Récurrence achevée.

$\boxed{\text{Exercice 6}}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n \leq 1$

<u>* $n=0$:</u> $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 \leq 1$ ✓

<u>* $n \geq 0$:</u> Sq $\exists n \in \mathbb{N} / 0 < u_n \leq 1$

Mq $0 < u_{n+1} \leq 1$

d'après (HR) : $0 < u_n \leq 1$

$(x \mapsto \sqrt{x})$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$ et $0, u_n, 1 \in \mathbb{R}_+$

donc $0 < \sqrt{u_n} \leq 1$

$-1 \leq -\sqrt{u_n} < 0$

$1 \leq 2-\sqrt{u_n} < 2$

$(x \mapsto \frac{1}{x})$ ↘ sur $]0,+\infty[$ et $1, 2-\sqrt{u_n}, 2 \in]0,+\infty[$

donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{2-\sqrt{u_n}} \leq 1$

donc $0 < u_{n+1} \leq 1$ ✓

Récurrence achevée.