

Semaine 3 : 2 au 6 octobre 2023

A. Signe Σ Révisions semaine 2. À rajouter : **sommes télescopiques et formule de Bernoulli****B. Valeur Absolue*** Définition, allure graphique, règles de calcul; inégalités triangulaires; intervalles de \mathbb{R} .→ **Résolution d'équations / inéquations faisant intervenir des valeurs absolues.****C. Nombre factorielle – signe \prod** *Note aux colleurs : les produits télescopiques ne sont pas au programme, sauf dans le cas de factorielles***D. Langage python**Variables booléennes ; Instruction conditionnelle `if`**Déroulement de la colle :****La colle commence par une question d'informatique (langage python) parmi :**

1. La fonction rampe est définie comme suit :

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Écrire une fonction `Rampe(x)` qui renvoie la valeur de la fonction rampe en `x`

2. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier
- n
- , qui

renvoie n si n est pair et $n - 1$ si n est impair.

3. Écrire une fonction
- `valabs(x)`
- , qui pour tout réel
- x
- renvoie la valeur de sa valeur absolue.
-
- sans utiliser la fonction `abs()`*

4. Écrire une fonction
- `signe(x)`
- qui, étant donné un réel
- x
- renvoie le signe de
- x
- , i.e.
- -1
- si
- x
- est strictement négatif,
- 0
- si
- x
- est nul et
- 1
- si
- x
- est strictement positif.

Puis, une question de cours parmi les suivantes avant de passer aux exercices :

1. Énoncer la formule (et la démontrer) d'une des sommes suivantes choisies par l'interrogateur :

 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ;$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad ; \quad \forall q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2. En remarquant que
- $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- ,

calculer $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)}$.

3. Montrer que :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$
- .

4. Montrer que : pour tout réels
- x, y
- et
- z
- ,
-
- $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

5. Résoudre dans
- $\mathbb{R} : |x - 7| = |4x - 1|$

6. Résoudre dans
- $\mathbb{R} : |3x + 1| > |x + 2|$

7. Simplifier :
- $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n(n+1)!} + \frac{1}{2(n+2)!}$

8. Pour tout entier naturel
- $n \geq 2$
- , calculer :
- $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

9. (difficile) Énoncer et démontrer la formule de Bernoulli.

10. (difficile) Écrire les produits suivants à l'aide de factorielles :

$$\prod_{p=1}^n 2p \quad \text{et} \quad \prod_{p=0}^{n-1} (2p+1)$$

11. (difficile) Montrer que : pour tout réels
- x, y
- ,
-
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

12. (difficile) Montrer que : pour tout réels
- a, b
- positifs**
- ,
-
- $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$
- .