DM1 - Corrigé

Exercice 1

1.

$$\sum_{k=3}^{n+4} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+k} (\sqrt{5})^{2k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \sum_{k=3}^{n+4} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left((\sqrt{5})^2\right)^{k}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right)^{n} \sum_{k=3}^{n+4} \left(\frac{5}{3}\right)^{k}$$

$$\underset{\frac{5}{3}\neq 1}{=} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^{n+5}}{1-\frac{5}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{5}{3}\right)^{3} \left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{5^3}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \times \left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}\right)}$$

2.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{n} (k^2-k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \cancel{1} - \sum_{k=1}^{n} k \cancel{+1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)\,(2n+1-3)}{6\sqrt{2}} = \frac{n(n+1)\,\overbrace{(2n-2)}^{2(n-1)}}{\underbrace{6}_{2\times 3}\sqrt{2}}$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{3\sqrt{2}}}$$

(3.)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}+k^3}{5} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{5} + \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{5} \times n + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n\left(\sqrt{n} + n(n+1)^2\right)}{20.}$$

$$= \frac{n\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{n}(n+1)^2\right)}{20.}$$

$$= \boxed{\frac{n\sqrt{n}\left(1 + n^2\sqrt{n} + 2n\sqrt{n} + \sqrt{n}\right)}{20.}}$$

Exercice 2

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

* $\underline{n=0}$: $S_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{2k-1}{2^k} = \frac{2\times 0 - 1}{2^0} = -1.$ } propriété initialisée

et $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = 2 - 3 = -1.$

* $\underline{n \geq 0}$: Sq $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ à un certain rang n.

Mq $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k-1}{2^k} = S_n + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$

$$\underset{(HR)}{=} 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{4n+6-2n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$ ✓

Récurrence achevée.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

* <u>$n=0$:</u> $\quad \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^0} + \frac{6 \times 0 - 15}{4} = \frac{19-15}{4} = \frac{4}{4} = 1 = u_0$ ✓

* <u>$n \geqslant 0$:</u> $\quad$ Sq $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ à un certain rang n.

$\quad$ Mq $u_{n+1} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{6(n+1)-15}{4} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{6n-9}{4}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 1$$

$$\underset{(HR)}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}\right) + n - 1$$

$$= \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3} \times \frac{6n-15}{4} + n - 1$$

$$= \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}(2n-5)}{4} + n - 1$$

$$= \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2n-5+4n-4}{4}$$

$$= \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{6n-9}{4} \checkmark$$

récurrence achevée.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, Posons $X = x^2 \geqslant 0$.

$$x^4 - 4x^2 + 3 = X^2 - 4X + 3.$$

1 et 3 sont racines et $1 \geqslant 0$ et $3 \geqslant 0$

X	0		1		3		$+\infty$
X^2-4X+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>Revenons à x :</u>

$\bullet\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant 1$

car $(x \mapsto \sqrt{x})$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$ et $0, x^2, 1 \geqslant 0$.

$\iff 0 \leqslant |x| \leqslant 1$

$\iff -1 \leqslant x \leqslant 1$

• $x^2 \geqslant 3 \iff \sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{3}$ car $(x \mapsto \sqrt{x}) \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ et $x^2, 3 \geqslant 0$.

$\iff |x| \geqslant \sqrt{3}$

$\iff x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $x \geqslant \sqrt{3}$.

Conclusion:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^4-4x^2+3		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^4-4x^2+3 \rvert$		x^4-4x^2+3	0	$-x^4+4x^2-3$	0	x^4-4x^2+3	0	$-x^4+4x^2-3$	0	x^4-4x^2+3.	