Semaine 4 : 9 au 13 octobre 2023

A. Signes $\sum$ et $\prod$

Révisions semaine 3. À rajouter :
$*$ **produits :** réindiçage du type $k' = k - p$ ou $k' = k + p \to$ **produits télescopiques**; lien entre somme et produit (passage au logarithme ou à l'exponentielle.
$*$ **Sommes doubles :** sommes indexées sur un carré, un rectangle, un triangle (avec ou sans la diagonale).
Programme officiel: *les attendus du programme se limitent au maniement de ces symboles conduisant à les mettre sous la forme de deux sommes simples successives.*

B. Récurrence

À rajouter : **récurrence double et récurrence forte**
Programme officiel: *lorsqu'un raisonnement par récurrence nécessite une hypothèse dite de "récurrence forte", la formulation de cette hypothèse devra être proposée.*

C. Valeur Absolue : révisions semaine 3

D. Calculs

$*$ ln et exp : calculs algébriques.
Note aux colleurs : les résolutions d'(in)équations et les propriétés fonctionnelles sont hors-programme

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. La fonction rampe est définie comme suit :
$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
Écrire une fonction `Rampe(x)` qui renvoie la valeur de la fonction rampe en `x`
2. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n, qui renvoie n si n est pair et $n-1$ si n est impair.
3. Écrire une fonction `valabs(x)`, qui pour tout réel x renvoie la valeur de sa valeur absolue.
sans utiliser la fonction `abs()`
4. Écrire une fonction `signe(x)` qui, étant donné un réel `x` renvoie le signe de `x`, i.e. -1 si `x` est strictement négatif, 0 si `x` est nul et 1 si `x` est strictement positif.

Puis, un petit calcul manipulant $\ln$ **et** $\exp$ **: voir Fiche 6 (sauf exercices 6 et 7)**

Puis, une question de cours parmi les suivantes avant de passer aux exercices :

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. Montrer que : pour tout réels x, y et z,
$|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
En déduire la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
5. Calculer : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (i + j)$.
6. Calculer : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (i + j)$
7. (difficile) Énoncer et démontrer la formule de Bernoulli.
8. (difficile) Écrire les produits suivants à l'aide de factorielles :
$$\prod_{p=1}^{n} 2p \quad \text{et} \quad \prod_{p=0}^{n-1} (2p + 1)$$
9. (difficile) Montrer que : pour tout réels x, y,
$|x + y| \leqslant |x| + |y|$
10. (difficile) Considérons la suite u définie par:
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.
On pourra supposer qu'il existe $n \geqslant 1$, tel que $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $u_k = 2^{k-1}$