Semaine 5 : 16 au 20 octobre 2023

A. Signes $\sum$ et $\prod$, factorielles, récurrence : révisions

B. Calculs

* ln et exp : calculs algébriques.
* ln et exp : résolutions d'(in)équations.

C. Suites usuelles

Suites arithmétiques: définition, expression de u_n en fonction de n, somme des $n+1$ premiers termes; limite, monotonie.
Suites géométriques: définition, expression de u_n en fonction de n, somme des $n+1$ premiers termes; limite de q^n quand n tend vers $+\infty$.
Suites arithmético-géométriques: définition, expression de u_n en fonction de n.
Suites récurrentes linéaires d'ordre deux: définition, équation caractéristique de discriminant Δ; expression de u_n en fonction de n (selon le signe de Δ). *ATTENTION ! Le cas $\Delta < 0$ est hors-programme*

→ **Capacité exigible (programme officiel): obtenir une expression pour le terme d'ordre n d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre deux.**

D. Langage `python`

boucle `for` : `range(n)`, `range(a,b)`, `range(a,b,c)`; calcul de sommes simples, doubles et de produits.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction d'argument `n` qui renvoie la valeur de la somme: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\sqrt{k}}$
2. Écrire une fonction d'argument `n` qui renvoie la valeur de la somme: $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$
3. Écrire une fonction d'argument `n` qui renvoie la valeur de $n!$
4. Écrire une fonction d'argument `n` non nul et qui renvoie la valeur du produit : $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2+1}$.

Puis, un petit calcul manipulant ln **et** exp **: voir Fiche 6 et Fiche 9**

Puis, une question de cours parmi les suivantes avant de passer aux exercices :

1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, où (u_n) est une suite usuelle choisie par l'interrogateur.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Énoncer et démontrer la formule donnant une expression de u_n en fonction de n.
3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Énoncer et démontrer la formule donnant une expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$
5. (difficile) Écrire les produits suivants à l'aide de factorielles :
$$\prod_{p=1}^{n} 2p \quad \text{et} \quad \prod_{p=0}^{n-1} (2p+1)$$
6. (difficile) En remarquant que $\displaystyle k = \sum_{j=1}^{k} 1$,
calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$
7. (difficile) Considérons la suite u définie par:
$\displaystyle u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.
On pourra supposer qu'il existe $n \geqslant 1$, tel que $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $u_k = 2^{k-1}$