Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 2 – Mathématiques

Mercredi 11 octobre 2023

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de six exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique). **:**

1. Écrire une fonction Python `f` prenant en argument un nombre réel x et renvoyant :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{si } x < -2 \\ x+2 & \text{si } -2 \leqslant x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. On tape dans l'éditeur :

```
from math import *
def mystere(n):
        s=0
        for k in range(1,n+1):
                if k%2 ==0:
                        s=s+log(k)
        return s
```

   (a) On appelle `mystere(10)` dans la console.
   Expliquer, en détaillant chaque étape de la fonction, le résultat renvoyé par l'ordinateur.

   (b) Que renvoie `mystere(0)` ? Justifier votre réponse.

   (c) Montrer que, pour tout entier n, `mystere(2n)` renvoie la valeur de $\ln(n!) + n\ln(2)$.

Exercice 2. :

1. Écrire sans valeurs absolues l'expression : $|x^4 - x^2 - 1|$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\left|\dfrac{x^2}{2} - 3x + 4\right| = \dfrac{2-x}{2x}$

Exercice 3. :

1. Déterminer deux réels a et b tels que : pour tout entier naturel k, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3}$

   En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer : pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(-2)^{i+j}$

Exercice 4. :

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,k=\frac{(-1)^n\,(2n+1)-1}{4}$

Exercice 5. Pour tout réel x, pour tout entier naturel n non nul, on considère le produit :

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

1. Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$.
2. $\forall\,x\neq 0$, montrer que : $P_n(x)=\dfrac{x+n}{x}\,P_n(x-1)$
3. En déduire que : $\forall\,p\in\mathbb{N}^*$, $P_n(p)=\dfrac{(n+p)!}{n!\,p!}$

Exercice 6. :

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=0\quad\text{ et }\quad\forall\,n\in\mathbb{N}\,,\;u_{n+1}=u_n+2n+3$$

   Montrer que : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant n^2$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=0\quad\text{ et }\quad\forall\,n\in\mathbb{N}\,,\;u_{n+1}=2\sum_{k=0}^{n}\sqrt{u_k}+\sqrt{u_n}+1$$

   Calculer u_1, u_2 et u_3. Puis montrer que : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=n^2$.
   On pourra supposer l'hypothèse de récurrence forte : il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\,k\leqslant n$, $u_k=k^2$

Exercice 7. :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1=3$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\;u_{n+1}=\dfrac{n\,(u_n-2)}{u_n+3n+1}$.

On définit également la suite (t_n) par : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\;t_n=\dfrac{n}{u_n+1}$.

On *admet* que ces suites sont bien définies.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer que : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\;t_{n+1}=3t_n+1$.
3. En déduire l'expression de t_n puis de u_n en fonction de n.