DS2 - Corrigé
11/10/2023

Exercice 2 :

(1.) Posons $X = x^2 \geq 0$.

$x^4 - x^2 - 1 = X^2 - X - 1$. $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

donc les racines sont : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0$

Donc :

X	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$X^2 - X - 1$		$-$	0	$+$	

$X \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ car $(x \mapsto \sqrt{x})$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$ et $x^2 \geq 0$

$\iff |x| \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ $\qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0$

$\iff x \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $x \leq -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Donc :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$		$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$		$+\infty$.
$x^4 - x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^4 - x^2 - 1 \rvert$		$x^4 - x^2 - 1$	0	$-x^4 + x^2 + 1$	0	$x^4 - x^2 - 1$	

(2.) On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$(2) \iff \left| \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8) \right| = \frac{2 - x}{2(2x)} \iff \frac{1}{2} \left| x^2 - 6x + 8 \right| = \frac{2-x}{2x} \times \frac{1}{2}$

$\iff \left| x^2 - 6x + 8 \right| = \frac{2-x}{2x}$

2 et 4 sont racines évidentes de $x^2 - 6x + 8$.

Donc :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x^2-6x+8		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{2-x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$		$-$	

. Si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$: $\frac{2-x}{x} < 0$ donc aucune solution.

. Si $x \in]0, 2]$: $(2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = \frac{2-x}{x}$

$$\Leftrightarrow x(x^2-6x+8) = 2-x$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) = 2-x$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x(x-4)+1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } \underbrace{x^2-4x+1}=0.$$

$$\Delta = 16-4 = 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2-\sqrt{3} \text{ ou } x = 2+\sqrt{3} > 2$$

or $2-\sqrt{3} \in]0, 2]$

Conclusion : $\boxed{S = \{2, 2-\sqrt{3}\}}$

Exercice 3 :

1. $$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3)+b(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{(a+b)k+(3a+b)}{(k+1)(k+3)}$$

Donc on prend $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a=1 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}}_{k'=k+2}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \cancel{\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1}} - \cancel{\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{5}{12} - \frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}} = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

② $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} (-2)^{i+j} = \cancel{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}(-2)^{i+j}\right)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(-2)^{i+j}\right)$

. $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}(-2)^{i+j} = (-2)^j \sum_{i=1}^{j}(-2)^i \underset{-2\neq 1}{=} (-2)^j \frac{-2-(-2)^{j+1}}{1-(-2)}$

$$= (-2)^j \frac{(-2)\left(1-(-2)^j\right)}{3} = \frac{1}{3}(-2)^{j+1} - \frac{1}{3}(-2)^{2j+1}$$

$$= \frac{-2}{3}(-2)^j + \frac{2}{3}(-2)^{2j} = \frac{-2}{3}(-2)^j + \frac{2}{3}\times 4^j$$

Donc: $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}(-2)^{i+j} = -\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}(-2)^j + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}4^j$

$$\underset{4\neq 1}{=} -\frac{2}{3}\,\frac{-2-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} + \frac{2}{3}\times\frac{4-4^{n+1}}{1-4}$$

$$= \boxed{\frac{4}{9}\left(1-(-2)^n\right) - \frac{8}{9}\left(1-4^n\right)}$$

Exercice 4

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

- **$n=1$.**
  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k = (-1)^1 \times 1 = -1$
  - $\displaystyle\frac{(-1)^1(2\times 1+1)-1}{4} = \frac{-3-1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$

- **$n \geq 1$.** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n.

  Montrons que
  $$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1)$$

$$\underset{(HR)}{=} \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)$$

$$= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} = \frac{(-1)^{n+1}(-2n-1+4n+4)-1}{4}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(-2n+3)-1}{4}$$

récurrence achevée.

Exercice 5

1. $P_n(0) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+0) = 1^n = \boxed{1}$

   $P_n(1) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{(n+1)!}{n!} = \boxed{n+1}$

   $P_n(-n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{n}{k}\right) = \boxed{0}$ car pour $k=n$: $1-\frac{n}{n} = 0$.

(2.) $\forall x\neq 0,\quad \frac{x+n}{x}P_n(x-1) = \frac{x+n}{x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x-1}{k}\right)$

$$= \frac{x+n}{x}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+(k-1)}{k}$$

$$= \frac{x+n}{x}\underbrace{\prod_{k=1}^{n}(x+k-1)}_{k'=k-1}\times\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}k}$$

$$= \frac{x+n}{x}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\times\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}k}$$

$$= \frac{\cancel{x}\times\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{\cancel{x}\prod_{k=1}^{n}k} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = P_n(x)\ \checkmark$$

(3.) Par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$:

- $\underline{p=1}$: $P_n(1) = n+1$ et $\frac{(n+1)!}{n!\,1!} = n+1$ ✓

- $\underline{p\geq 1}$: Sq $P_n(p) = \frac{(n+p)!}{n!\,p!}$ à un certain rang p.

  Mq $P_n(p+1) = \frac{(n+p+1)!}{n!\,(p+1)!}$

D'après (2), $\underset{(x=p+1\neq 0)}{}$ $P_n(p+1) = \frac{p+1+n}{p+1}P_n(p) \underset{(HR)}{=} \frac{(n+p+1)\,(n+p)!}{n!\,p!\,(p+1)}$

$$= \frac{(n+p+1)!}{n!\,(p+1)!}\ \checkmark$$

récurrence achevée.

Exercice 6 :

(1.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq n^2$

· $n=0$: $u_0 = 0 \geq 0^2$ ✓

· $n \geq 0$: Sq $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$. Mq $u_{n+1} \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq n^2+2n+1$

$$u_{n+1} = u_n + 2n+3 \underset{(HR)}{\geq} n^2+2n+3$$

$$\text{or } n^2+2n+3 = (n^2+2n+1)+2 \geq n^2+2n+1 \checkmark$$

récurrence achevée

(2.) $$u_1 = 2\sum_{k=0}^{0} \sqrt{u_k} + \sqrt{u_0} + 1 = 2\sqrt{u_0} + \sqrt{u_0} + 1 = \boxed{1}$$

$$u_2 = 2\sum_{k=0}^{1} \sqrt{u_k} + \sqrt{u_1} + 1 = 2\left(\sqrt{u_0}+\sqrt{u_1}\right) + \sqrt{u_1}+1 = \boxed{4 = 2^2}$$

$$u_3 = 2\sum_{k=0}^{2} \sqrt{u_k} + \sqrt{u_2} + 1 = 2\left(\sqrt{u_0}+\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}\right) + \sqrt{u_2}+1$$

$$= 2(1+2) + 2+1 = \boxed{9 = 3^2}$$

Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2$

· $n=0$: $u_0 = 0 = 0^2$ ✓

· $n \geq 0$ Sq $\exists n \in \mathbb{N}$ / $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u_k = k^2$

Mq $u_{n+1} = (n+1)^2$

$$u_{n+1} = 2\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}\right) + \sqrt{u_n} + 1 \underset{(HR)}{=} 2\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k^2}\right) + \sqrt{n^2} + 1$$

$$\underset{\sqrt{k^2}=|k|=k}{=} 2\sum_{k=0}^{n} k + n+1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1)$$

$$= (n+1)^2 \checkmark$$

récurrence achevée

Exercice 7

1. $u_2 = \dfrac{1\,(u_1-2)}{u_1+3\times1+1} = \boxed{\dfrac{1}{7}}$

$u_3 = \dfrac{2\,(u_2-2)}{u_2+3\times2+1} = \dfrac{2\left(\frac{1}{7}-2\right)}{\frac{1}{7}+7} = \dfrac{2\,(1-14)}{7\left(\frac{1}{7}+7\right)}$

$= \dfrac{-2\times13}{50} = \boxed{-\dfrac{13}{25}}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$t_{n+1} = \dfrac{n+1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{n+1}{\dfrac{n(u_n-2)}{u_n+3n+1}+1} = \dfrac{(n+1)\,(u_n+3n+1)}{n(u_n-2)+u_n+3n+1}$

$= \dfrac{(n+1)\,(u_n+3n+1)}{n\,u_n-2n+u_n+3n+1} = \dfrac{(n+1)\,(u_n+3n+1)}{(n+1)+(n+1)\,u_n}$

$= \dfrac{u_n+3n+1}{1+u_n} = 3\,\dfrac{n}{u_n+1}+1 = 3t_n+1$ ✓

3. On résout : $x = 3x+1 \iff 2x=-1 \iff x=-\frac{1}{2}$

Donc $\left(t_n+\frac{1}{2}\right)$ est géométrique de raison 3

Donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*}$, $t_n = 3^{n-1}\left(t_1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$ avec $t_1 = \dfrac{1}{u_1+1} = \dfrac{1}{3+1}$

$t_1 = \dfrac{1}{4}$

$\boxed{t_n = 3^{n-1}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$

et $u_n+1 = \dfrac{n}{t_n} \iff u_n = \dfrac{n}{t_n}-1 = \dfrac{n}{3^{n-1}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}-1$

$\boxed{u_n = \dfrac{4n}{3^n-2}-1}$