Semaine 6 : 6 au 10 novembre 2023

A. Révisions : suites usuelles, ln , exp et puissances

B. Coefficients binomiaux

$*$ **Définition et propriétés:** $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$; $\forall n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ *(formule de symétrie)*; Pour tout entier $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$. *(formule du chef)*

$*$ **Formule de Pascal**; illustration du triangle de Pascal

$*$ **Binôme de Newton**.

→ utilisation du triangle de Pascal pour des petites puissances.

→ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

C. Lecture du cercle trigonométrique

$*$ **Sinus, cosinus**: 2π-périodiques, parité/imparité; $\cos(\pi - \theta) =$, $\sin(\pi - \theta)$, $\cos(\pi + \theta)$, $\sin(\pi + \theta)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

$*$ **Tangente**: π-périodique, impaire; $\tan(\theta + \pi)$, $\tan(\pi - \theta) =$ et $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$, en fonction de $\tan(\theta)$.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction d'argument `n` qui renvoie la valeur de la somme: $\sum_{k=1}^{n} k^{\sqrt{k}}$
2. Écrire une fonction d'argument `n` qui renvoie la valeur de la somme: $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$
3. Écrire une fonction d'argument `n` qui renvoie la valeur de $n!$
4. Écrire une fonction d'argument `n` non nul et qui renvoie la valeur du produit : $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2+1}$.

Puis, un calcul de puissances inspiré des sites:

`https://www.annales2maths.com/2nd-exercices-puissances/`
`https://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp/IMG/pdf/Exercices_sur_les_puissances.pdf`

Puis un exercice de lecture de cercle trigonométrique du type Fiche 11, exercices 1, 4 et 6.

→ *Note aux colleurs: pas d'exercices manipulant la tangente.*

Puis, une question de cours parmi les suivantes avant de passer aux exercices :

1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, où (u_n) est une suite usuelle choisie par l'interrogateur.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Énoncer et démontrer la formule donnant une expression de u_n en fonction de n.
3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Énoncer et démontrer la formule donnant une expression de u_n en fonction de n.
4. Formule de Pascal : énoncé précis ; illustration du triangle de Pascal à justifier grâce aux propriétés des coefficients binomiaux.
5. Coefficients binomiaux : énoncés et preuves des formules de symétrie et du chef.
6. Formule du binôme de Newton: énoncé précis; application au calcul de $(a+b)^3$, pour tous réels a, b.
7. Calcul d'une somme choisie par l'interrogateur parmi : $\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k}\binom{n}{k}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k\, 2^{-k}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
8. (difficile) Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre deux, dont le discriminant de son équation caractéristique associée est strictement positif. Donner et démontrer la formule donnant u_n en fonction de n.
9. (difficile) Calcul de la somme : $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$
10. (difficile) Formule de Pascal : énoncé et preuve.
11. (difficile) Montrer que les coefficients binomiaux sont des entiers.