DM2 - Corrigé
20/10/2023.

Exercice 1

1. sur $\mathbb{R}$:

$$e^{x}+e^{1-x}=e+1 \Leftrightarrow e^{x}+\frac{e}{e^{x}}=e+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+e}{e^{x}}=e+1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}+e=e^{x}(e+1)$$

$$\Leftrightarrow (e^{x})^{2}-(e+1)e^{x}+e=0.$$

On pose $X=e^{x}>0$.

Donc $(1) \Leftrightarrow X^{2}-(e+1)X+e=0$ sur $]0,+\infty[$

$\Delta=(e+1)^{2}-4e=e^{2}+2e+1-4e=e^{2}-2e+1=(e-1)^{2}>0$

donc $(1) \Leftrightarrow X=\frac{e+1-(e-1)}{2}=1>0$ ou $X=\frac{e+1+(e-1)}{2}=e>0$

car $\sqrt{(e-1)^{2}}=|e-1|=e-1$
$(e>1)$

$\Leftrightarrow e^{x}=1$ ou $e^{x}=e$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

Conclusion: $\boxed{S=\{0,1\}.}$

2. Ensemble de résolution:

$3x-5\neq 0$ et $\frac{x+1}{3x-5}>0$

x	$-\infty$		-1		$5/3$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{3x-5}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Donc on résout sur $]-\infty, -1[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$:

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0 \iff \frac{x+1}{3x-5} \leq 1 \iff \frac{x+1}{3x-5} - 1 \leq 0$$

$$\iff \frac{x+1-3x+5}{3x-5} \leq 0 \iff \frac{-2x+6}{3x-5} \leq 0$$

$$\iff \frac{-x+3}{3x-5} \leq 0$$

x	$-\infty$		$5/3$		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x+3}{3x-5}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\boxed{S =]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[}$

(3.) On résout sur $]0, +\infty[$.

Posons $X = \ln(x) \in \mathbb{R}$ donc $(3) \iff X^2 - X - 1 > 0$.

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$$

donc les racines sont $X = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
X & -\infty & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & +\infty \\
\hline
X^2-X-1 & + & 0 & - & 0 & +
\end{array}$$

. $X > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

. $X < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

Donc :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} & & e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} & +\infty \\
\hline
\ln(x)^2-\ln(x)-1 & + & 0 & - & 0 & +
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{S =]-\infty, e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}[\cup]e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[}$

Exercice 2.

. Par récurrence (immédiate) sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln\left(\sqrt{2u_n}\right) = \frac{1}{2}\ln(2u_n) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\ln(u_n)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{\ln(2)}{2}$

. On résout $x = \frac{1}{2}x + \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow x = \ln(2)$

Donc $(v_n - \ln(2))$ est géo de raison $\frac{1}{2}$: $(v_0 = \ln(u_0) = 0)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - \ln(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - \ln(2)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-\ln 2)$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-\ln 2) + \ln(2)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n}$, $\boxed{u_n = \exp\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n (-\ln(2)) + \ln(2)\right)}$