

Exercice 1

1. ^{sur IR :}
 $e^x + e^{-x} = e + 1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e}{e^x} = e + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} + e}{e^x} = e + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + e = e^x (e + 1)$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (e + 1)e^x + e = 0.$$

On pose $X = e^x > 0$.

Donc (1) $\Leftrightarrow X^2 - (e + 1)X + e = 0$ sur $]0, +\infty[$

$$\Delta = (e + 1)^2 - 4e = e^2 + 2e + 1 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 > 0$$

donc (1) $\Leftrightarrow X = \frac{e + 1 - (e - 1)}{2} = 1 > 0$ ou $X = \frac{e + 1 + (e - 1)}{2} = e > 0$

car $\sqrt{(e - 1)^2} = |e - 1| = e - 1$
 ($e > 1$)

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = e$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Conclusion: $S = \{0, 1\}$.

2. Ensemble de résolution:

$$3x - 5 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x + 1}{3x - 5} > 0$$

x	$-\infty$		-1		$5/3$		$+\infty$
$3x-5$			+		0		+
$x+1$		-	0		+		+
$\frac{x+1}{3x-5}$		+	0		-		+

Donc on résout sur $] -\infty, -1[\cup] \frac{5}{3}, +\infty[$:

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{3x-5} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{3x-5} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-3x+5}{3x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x-5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+3}{3x-5} \leq 0$$

x	$-\infty$		$5/3$		3		$+\infty$
$-x+3$		+		+	0		-
$3x-5$		-	0		+		+
$\frac{-x+3}{3x-5}$		-		+	0		-

Conclusion: $S =] -\infty, -1[\cup] \frac{5}{3}, +\infty[$

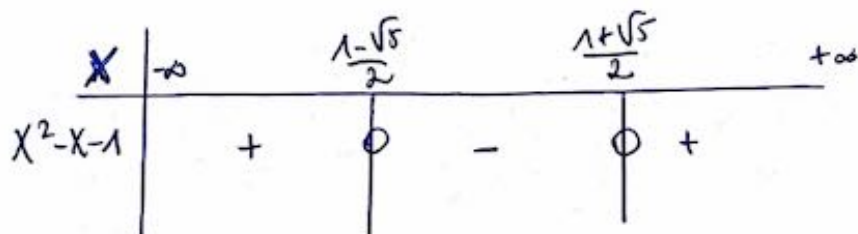
(3.)

On résout sur $] 0, +\infty[$.

Posons $X = \ln(x)$ et donc (3) $\Leftrightarrow X^2 - X - 1 > 0$.

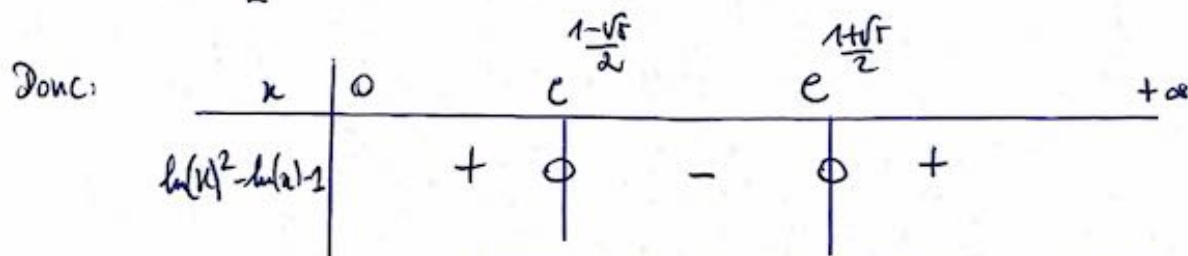
$$\Delta = 1+4 = 5 > 0$$

donc les racines sont $X = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$



Conclusion: $\mathcal{D} =]-\infty, e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}[\cup]e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[$

Exercice 2.

Par récurrence (immédiate) sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(\sqrt{2u_n}) = \frac{1}{2} \ln(2u_n) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \ln(u_n)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + \frac{\ln(2)}{2}$

On résout $x = \frac{1}{2} x + \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow x = \ln(2)$

Donc $(v_n - \ln(2))$ est seq de raison $\frac{1}{2}$:

$(v_0 = \ln(u_0) = 0)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - \ln(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - \ln(2)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-\ln(2))$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-\ln(2) + \ln(2))$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n}$, $u_n = \exp\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n (-\ln(2) + \ln(2))\right)$