Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 3 – Mathématiques

Mercredi 15 novembre 2023

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique). **:**

1. Écrire une fonction Python `somme(n,x)` qui pour tout réel x, pour tout entier naturel n, renvoie la valeur de : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,x^{k-2}$.
   Que renvoie `somme` pour $n = 0$ et $n = 1$? Justifier.
2. Écrire une fonction Python `suite(n)` qui pour tout entier naturel n, renvoie la valeur de u_n, où :

$$u_2 = e^5 \ , \ \forall\, n \geqslant 3\,,\, u_n = \sqrt{n^2+1} + \ln(u_{n-1})$$

Exercice 2. : Calculer les dérivées de :

$$f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2\, e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+1}}$$

on ne demande pas de préciser l'ensemble de dérivation de ces fonctions.

Exercice 3. :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+5}\right) \geqslant 0$
2. Résoudre dans $[-\pi, \pi[$: $\sin^2(x) - 2\,\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 1$

Exercice 4. : On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad b_0 = 1$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = \frac{3\,a_n + b_n}{4} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Le but de cet exercice est d'exprimer a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier naturel n. Pour cela, on se propose d'utiliser deux méthodes. Les questions 1 et 2 sont donc indépendantes : aucun résultat de l'une doit être utilisée pour l'autre.

1. **Première méthode :**
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{5}{4}\, a_{n+1} - \dfrac{1}{4}\, a_n$.
   (b) En déduire a_n puis b_n en fonction de n.
2. **Deuxième méthode :**
   (a) Montrer que la suite $(2\, a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
   (b) En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   (c) Déterminer une expression de a_n puis de b_n en fonction de n.

Exercice 5. :
Question préliminaire : Montrer que $\sin(p-q) = \cos(p)\, \cos(q)\, (\tan(p) - \tan(q))$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geqslant 0$, $\cos(k\, \alpha) \neq 0$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos(k\, \alpha)\, \cos\left((k+1)\, \alpha\right)}$$

1. On suppose dans cette question que $\sin(\alpha) \neq 0$. Montrer que $S_n = \dfrac{\tan\left((n+1)\, \alpha\right)}{\sin(\alpha)}$
2. Déterminer S_n si $\sin(\alpha) = 0$.
3. Pour quelles valeurs de α a-t-on $S_n = 0$?

Exercice 6. :
1. Montrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$
2. En utilisant la question précédente, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = n \dbinom{2n-1}{n}$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{n}{2} \dbinom{2n}{n}$