# Calcul de limites

**Rappel 1** On rappelle que F.I signifie **forme indéterminée**: on ne peut pas conclure. Pour cela, il faut **lever** l'indétermination. On relève 4 indéterminations:

$$\boxed{0 \times \infty, (+\infty) + (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

• **Somme:**

| $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell + \ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I | |
| $+\infty$ | $+\infty$ | F.I | $+\infty$ | |
| $\uparrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ | | | | |

• **Produit:**

| $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\ell' \neq 0$ | $0$ | $\leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell \neq 0$ | $\infty$ | $\infty$ | $\ell\,\ell'$ | $0$ | |
| $0$ | F.I | F.I | $0$ | $0$ | |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ | F.I | |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ | F.I | |
| $\uparrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ | | | | | |

Dans le cas $\infty$, c'est la règle usuelle des signes qui s'applique:

| $\times$ $\nearrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\ell < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell > 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

• **Quotient:**

| $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ | $\ell \neq 0$ | $\ell = 0^+$ $f(x)>0$ au vois de $x_0$ | $\ell = 0^-$ $f(x)<0$ au vois de $x_0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\ell = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{1}{\ell}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ | n'a pas de limite |

• Puisque $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$, on en déduit la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en utilisant les deux derniers tableaux.

## I. Calcul de limite de la forme "$\dfrac{\lambda}{0}$", où $\lambda \neq 0$

On est dans le cas d'un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, où $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ avec $\lambda$ réel **non nul** et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Donc d'après le tableau "quotient", on doit connaître le signe de $\dfrac{\lambda}{g(x)}$ quand $x$ est au voisinage (très proche) de $x_0$.
Très souvent, on va étudier les limites à gauche et à droite en $x_0$. C'est-à-dire :

- $x$ tend vers $x_0$ ET $x > x_0$, noté $\lim\limits_{x \to x_0^+}$
- $x$ tend vers $x_0$ ET $x < x_0$, noté $\lim\limits_{x \to x_0^-}$

Et suivant le signe de $g(x)$ quand $x$ tend vers $x_0$ à droite ou à gauche, on obtient :

- si $\dfrac{\lambda}{g(x)} > 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$
- si $\dfrac{\lambda}{g(x)} < 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $-\infty$

**Exemple 1** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

## II. Repérer le dominant

1. **Dominant en l'infini :**

   (a) Les **grandes** puissances de $x$ l'emportent en l'infini : on **factorise**.

   **Exemple 2** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+1}$. (F.I de la forme $\frac{\infty}{\infty}$)

   (b) Cas des **racines** et de la **quantité conjuguée** :

   **Exemple 3** $\sqrt{x^2+3x+1}+x+1$ en $-\infty$ (F.I de la forme $(+\infty)+(-\infty)$).

   (c) En $+\infty$ : $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $(\ln(x))^p << x^n << e^x$, ce qui donne les **croissances comparées** : $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0}$$

   **Exemple 4** On combine souvent avec la factorisation par le dominant.
   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+2x+7}{e^{2x}-1}$.

2. **Dominant en** $0$ **:**

   (a) Les **petites** puissances de $x$ l'emportent en 0 !! On **factorise**.

   **Exemple 5** Limite en $0^+$ de $f(x) = \dfrac{x+x^2}{\sqrt{x}+x^2}$ (F.I de la forme $\frac{0}{0}$).

   (b) **croissances comparées** : $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^n\,(\ln x)^p = 0}$$

   **Exemple 6** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$

## III. Organisation dans les calculs

1. **CIBLER** l'indétermination. "Mettre de côté" les termes qui ne génèrent pas d'indétermination.
2. Si $x$ tend vers un réel $a$ non nul, **se ramener en** $0$ en posant $h = x - a$.
3. **Repérer le dominant et factoriser** (cas particulier de la racine)
4. **Bien connaître ses croissances comparées**

**Exercice 1** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$
5. $\ln(e - e^{-1/x})$ en $0^-$
6. $\ln(e - e^{-1/x})$ en $1^+$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-1/x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left|x+\frac{1}{x}\right|$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-e^{1/x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{x^2} - e^{3x} + x^2$
12. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^{-3x} - \frac{1}{x} + x - e^{x^2}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{4x}-e^x-1}{x^4+2x+1}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^5 e^{-x^2}$.
16. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2} - 3x$
17. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$
18. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}$
19. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right)$
20. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}$