Calcul de limites

Rappel 1 On rappelle que F.I signifie **forme indéterminée**: on ne peut pas conclure. Pour cela, il faut **lever** l'indétermination. On relève 4 indéterminations:

$$\boxed{0 \times \infty, (+\infty) + (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

• **Somme:**

$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$	$\leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I	
$+\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$	
$\uparrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$				

• **Produit:**

$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell' \neq 0$	0	$\leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\ell \neq 0$	∞	∞	$\ell\,\ell'$	0	
0	F.I	F.I	0	0	
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞	F.I	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	F.I	
$\uparrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$					

Dans le cas ∞, c'est la règle usuelle des signes qui s'applique:

$\times$ $\nearrow$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$-\infty$	$+\infty$

• **Quotient:**

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0^+$ $f(x)>0$ au vois de x_0	$\ell = 0^-$ $f(x)<0$ au vois de x_0	$-\infty$	$+\infty$	$\ell = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	n'a pas de limite

• Puisque $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$, on en déduit la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en utilisant les deux derniers tableaux.

I. Calcul de limite de la forme "$\dfrac{\lambda}{0}$", où $\lambda \neq 0$

On est dans le cas d'un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, où $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ avec λ réel **non nul** et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Donc d'après le tableau "quotient", on doit connaître le signe de $\dfrac{\lambda}{g(x)}$ quand x est au voisinage (très proche) de x_0.

Très souvent, on va étudier les limites à gauche et à droite en x_0. C'est-à-dire :

- x tend vers x_0 ET $x > x_0$, noté $\lim\limits_{x \to x_0^+}$
- x tend vers x_0 ET $x < x_0$, noté $\lim\limits_{x \to x_0^-}$

Et suivant le signe de $g(x)$ quand x tend vers x_0 à droite ou à gauche, on obtient :

- si $\dfrac{\lambda}{g(x)} > 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$
- si $\dfrac{\lambda}{g(x)} < 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $-\infty$

Exemple 1 $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ et $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

II. Repérer le dominant

1. **Dominant en l'infini :**

   (a) Les **grandes** puissances de x l'emportent en l'infini : on **factorise**.

   Exemple 2 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+1}$. (F.I de la forme $\frac{\infty}{\infty}$)

   (b) Cas des **racines** et de la **quantité conjuguée** :

   Exemple 3 $\sqrt{x^2+3x+1}+x+1$ en $-\infty$ (F.I de la forme $(+\infty)+(-\infty)$).

   (c) En $+\infty$: $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $(\ln(x))^p << x^n << e^x$, ce qui donne les **croissances comparées** : $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{(e^x)^p} = 0 \text{ (ou encore } \lim_{x\to+\infty} x^n\, e^{-px} = 0)}$$

   Exemple 4 On combine souvent avec la factorisation par le dominant.
   $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2x+7}{e^{2x}-1}$.

(d) Généralisation aux puissances réelles : $\forall \alpha, \beta > 0$, $\forall a > 1$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(e^x)^\beta} = 0 \text{ (ou encore } \lim_{x\to+\infty} x^\alpha\, e^{-\beta\, x} = 0)}$$

Exemple 5 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2}$.

Remarque 1 En passant à l'inverse: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty}$

2. **Dominant en** 0 **:**

   (a) Les **petites** puissances de x l'emportent en 0 !! On **factorise**.

   Exemple 6 Limite en 0^+ de $f(x) = \dfrac{x + x^2}{\sqrt{x} + x^2}$ (F.I de la forme $\frac{0}{0}$).

   (b) **croissances comparées** : $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha,\ \beta > 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} x^n\,(\ln x)^p = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to0^+} x^\alpha\,|\ln x|^\beta = 0}$$

   Exemple 7 $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\ln(x + \sqrt{x})$

III. Organisation dans les calculs

1. **CIBLER** l'indétermination. "Mettre de côté" les termes qui ne génèrent pas d'indétermination.
2. Si x tend vers un réel a non nul, **se ramener en** 0 en posant $h = x - a$.
3. **Repérer le dominant et factoriser** (cas particulier de la racine)
4. **Bien connaître ses croissances comparées**

Exercice 1 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$
2. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x+3}{x+3}$
3. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$
4. $\ln(e-e^{-1/x})$ en 0^+
5. $\lim_{x\to 0} e^{-1/x}$

Exercice 2 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$
2. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2}-3x$
3. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x$
4. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$
5. $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right)$
6. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}$
7. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$

Exercice 3 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x-e^{1/x}}$
2. $\lim_{x\to +\infty} e^{x^2}-e^{3x}+x^2$
3. $\lim_{x\to -\infty} e^{-3x}-\dfrac{1}{x}+x-e^{x^2}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
5. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{4x}-e^x-1}{x^4+2x+1}$
6. $\lim_{x\to +\infty} x^2e^{1/x}$.
7. $\dfrac{x\ \ln(x)}{\sqrt{x}+1}$, en 0^+
8. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\ \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

Exercice 4 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to +\infty} x^4e^{-\sqrt{x}}$.
2. $\lim_{x\to 0} x^2e^{1/x}$.
3. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x^3}}{x}$.
4. $\lim_{x\to +\infty} (x-1)^2\ \ln(x-1)$.
5. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\, e^{\frac{1}{x\,(x-1)}}$, en 0^+
6. $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^2\ \ln(x-1)$.