Semaine 10 : 2 au 6 décembre 2024

A. Nombres complexes – forme algébrique

∗ **Forme algébrique:** parties réelle et imaginaire; règles de calcul; représentation graphique.
→ **binôme de Newton dans $\mathbb{C}$**
∗ **Conjugué:** définition, représentation géométrique, règles de calcul; $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z} \text{ et } z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}\,.$$

∗ **Module:** définition, représentation géométrique, règles de calcul; inégalités triangulaires.
∗ Résolution de $z^2 = a$, si $a \in]-\infty, 0[$ ou $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
∗ Racines complexes d'un trinôme du second degré dans le cas $\Delta < 0$.

B. Nombres complexes – forme trigonométrique

∗ **Argument d'un complexe non nul:** représentation géométrique; propriétés (somme, quotient).
∗ **Formes trigonométrique / exponentielle;** règles de calcul, formules d'Euler et formule de Moivre.
∗ Technique de l'angle moyen: $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin(\dfrac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.
→ **sommes trigonométriques. les techniques de linéarisation / antilinéarisation ne sont pas au programme de colles.**
∗ Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique/exponentielle.
→ **suites récurrentes linéaires d'ordre deux de $\Delta < 0$**
∗ Résolution d' (in)équations trigonométriques de la forme : $a\cos x + b\sin x = c$.

C. Langage `python`

Boucle `for` ; `range(n)` ; `range(a,b)` ; `range(a,b,c)` ; **calcul de sommes**

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Pour tout entier n et tout réel x, soit : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.
   Écrire une fonction des variables (n,x) qui calcule la valeur de $S_n(x)$.
2. Écrire une fonction qui renvoie la valeur de : $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$
3. Pour tout entier n et tout réel q, soit : $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$.
   Écrire une fonction de paramètres `n,q` qui calcule la valeur de $S_n(q)$.

Puis, une question de cours parmi les suivantes avant de passer aux exercices :

1. Forme algébrique d'un complexe choisi par l'interrogateur : $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-i}$, $\overline{\left(\dfrac{i+3}{1-4i}\right)}$.
2. Forme exponentielle d'un complexe choisi par l'interrogateur : $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$, $(1+j)^5$
3. Calculer : $(1-i)^{20}$
4. Résoudre : $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}$.
5. Résoudre : $z^2 = \sqrt{3} - i$.
6. $\forall\theta \in \mathbb{R}$, montrer que : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
7. $z = \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.
   Pour quels réels θ z est-il bien défini ?
   Déterminer ses parties réelle et imaginaire.
8. Calculer : $\sum_{k=0}^{n} \cos(k)$