# Étude des branches infinies

BCPST 1C – Mme MOREL

Soit une fonction $f$ définie sur un ensemble $D$ sauf en $x_0$. On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de $f$. Intuitivement, une branche infinie de $\mathcal{C}$ est une portion de la courbe de $f$ de "longueur" infinie. On parle donc de branche infinie dès que l'une au moins des coordonnées $x$ ou $y = f(x)$ tend vers l'infini. L'étude des branches infinies est indispensable à l'étude d'une fonction.

## 1 Étude en un point: $x_0 \in \mathbb{R}$

Deux cas possibles: cette limite est soit finie, soit infinie.
- $*$ **Si la limite de $f$ en $x_0$ est finie:** la fonction est alors prolongeable par continuité en $x_0$.
- $*$ **Si la limite de $f$ en $x_0$ est infinie:**

**Exemple 1 :** Donner $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$ et tracer la courbe représentative de la fonction logarithme.

Donner $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$, et tracer, dans le même repère, la courbe représentative de cette fonction et la droite d'équation $x = 1$.

| |
|---|
| Si en un point $x_0$, $f$ admet une limite (éventuellement à gauche ou à droite) infinie, on dit que $\mathcal{C}$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$. |

## 2 Limite en l'infini: $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$

### 2.1 Étape 1: Calculer $\lim\limits_{\infty} f$

Encore deux cas possibles: cette limite est soit finie, soit infinie.
- $*$ **Si cette limite est réelle:**

**Exemple 2 :** Donner $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x)$ et tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \dfrac{1}{x}$, et tracer, dans le même repère, la courbe représentative de cette fonction et la droite d'équation $y = 2$.

Si en l'infini, $f$ admet une limite finie $l$,
on dit que $\mathcal{C}$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$.

$*$ **Si cette limite est infinie: il faut poursuivre l'étude pour préciser le type de branche infinie.**

## 2.2 Étape 2: $\lim\limits_{\infty} f = \infty \to$ calculer $\lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

On va distinguer trois cas, suivant que $\lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ est infinie, nulle ou non nulle:

$*$ **Si** $\lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$**:** on dit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ admet une } \textbf{branche parabolique de direction } (O_y)}$

*Exemples:* Fonctions carrée en $\pm\infty$, exponentielle en $+\infty$.

$*$ **Si** $\lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$**:** on dit que $\mathcal{C}$ admet une $\boxed{\textbf{branche parabolique de direction } (O_x)}$

*Exemples:* Fonctions racine en $+\infty$, logarithme en $+\infty$.

$*$ **Si** $\lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$**, avec** $\boxed{a \neq 0}$**:** on dit que $\mathcal{C}$ admet une **direction asymptotique** d'équation $y = ax$.
Il reste encore à en préciser le type.

### 2.3 Étape 3: $\lim\limits_{\infty} f = \infty \rightarrow \lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \neq 0) \rightarrow$ calculer $\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax)$

Deux cas à envisager: cette limite est soit infinie, soit finie.
$*$ **Si** $\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax) = \infty$**:**

**Exemple 3** Considérons la fonction $f(x) = \ln x + \dfrac{x}{2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2}$.

Courbe représentative de $f$ et droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ dans un même repère:

| |
|---|
| Si en l'infini, $f(x) - ax$ admet une limite infinie,<br>on dit que $\mathcal{C}$ admet une **branche parabolique** de direction la droite d'équation $y = ax$. |

$*$ **Si** $\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax) = b$**:**

**Exemple 4** On considère la fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$. Calculer les limites: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x$.
Courbe représentative de $f$ et droite d'équation $y = 2x + 1$ dans un même repère:

| |
|---|
| Si en l'infini, $f(x) - ax$ admet une limite finie $b$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0$),<br>on dit que $\mathcal{C}$ admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$. |

**Remarque 1 : Etude de la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote.**
Cela revient à étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ *au voisinage de l'infini*:
$*$ Si $f(x) - (ax + b) > 0$, alors $\mathcal{C}$ est au dessus de son asymptote.
$*$ Si $f(x) - (ax + b) < 0$, alors $\mathcal{C}$ est en dessous de son asymptote.