

Étude des branches infinies

Soit une fonction f définie sur un ensemble D sauf en x_0 . On note \mathcal{C} la représentation graphique de f . Intuitivement, une branche infinie de \mathcal{C} est une portion de la courbe de f de "longueur" infinie. On parle donc de branche infinie dès que l'une au moins des coordonnées x ou $y = f(x)$ tend vers l'infini. L'étude des branches infinies est indispensable à l'étude d'une fonction.

1 Étude en un point: $x_0 \in \mathbb{R}$

Deux cas possibles: cette limite est soit finie, soit infinie.

- * **Si la limite de f en x_0 est finie:** la fonction est alors prolongeable par continuité en x_0 .
- * **Si la limite de f en x_0 est infinie:**

Exemple 1 : Donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ et tracer la courbe représentative de la fonction logarithme.

Donner $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$, et tracer, dans le même repère, la courbe représentative de cette fonction et la droite d'équation $x = 1$.

Si en un point x_0 , f admet une limite (éventuellement à gauche ou à droite) infinie, on dit que \mathcal{C} admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.

2 Limite en l'infini: $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$

2.1 Étape 1: Calculer $\lim_{\infty} f$

Encore deux cas possibles: cette limite est soit finie, soit infinie.

- * **Si cette limite est réelle:**

Exemple 2 : Donner $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$ et tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x}$, et tracer, dans le même repère, la courbe représentative de cette fonction et la droite d'équation $y = 2$.

Si en l'infini, f admet une limite finie ℓ ,
on dit que \mathcal{C} admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$.

* Si cette limite est infinie: il faut poursuivre l'étude pour préciser le type de branche infinie.

2.2 Étape 2: $\lim_{\infty} f = \infty \rightarrow$ calculer $\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x}$

On va distinguer trois cas, suivant que $\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie, nulle ou non nulle:

* Si $\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$: on dit que \mathcal{C} admet une **branche parabolique de direction** (O_y)

Exemples: Fonctions carrée en $\pm\infty$, exponentielle en $+\infty$.

* Si $\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: on dit que \mathcal{C} admet une **branche parabolique de direction** (O_x)

Exemples: Fonctions racine en $+\infty$, logarithme en $+\infty$.

* Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, avec $a \neq 0$: on dit que \mathcal{C} admet une **direction asymptotique** d'équation $y = ax$.
Il reste encore à en préciser le type.

2.3 Étape 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \neq 0) \rightarrow$ calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

Deux cas à envisager: cette limite est soit infinie, soit finie.

* Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$:

Exemple 3 Considérons la fonction $f(x) = \ln x + \frac{x}{2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{2}$.

Courbe représentative de f et droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ dans un même repère:

Si en l'infini, $f(x) - ax$ admet une limite infinie,
on dit que \mathcal{C} admet une **branche parabolique** de direction la droite d'équation $y = ax$.

* Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$:

Exemple 4 On considère la fonction $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$. Calculer les limites: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 2x$.
Courbe représentative de f et droite d'équation $y = 2x + 1$ dans un même repère:

Si en l'infini, $f(x) - ax$ admet une limite finie b ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$),
on dit que \mathcal{C} admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

Remarque 1 : Etude de la position de \mathcal{C} par rapport à son asymptote.

Cela revient à étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ au voisinage de l'infini:

- * Si $f(x) - (ax + b) > 0$, alors \mathcal{C} est au dessus de son asymptote.
- * Si $f(x) - (ax + b) < 0$, alors \mathcal{C} est en dessous de son asymptote.

3 Entraînement

Exercice 1 Étudier les branches infinies de la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2 :

1. Étudier en $+\infty$ la branche infinie de la fonction f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Étudier les branches infinies de la fonction : $h(x) = \frac{x \ln x + \ln x}{\sqrt{x+1}}$
3. Étudier les branches infinies de la fonction : $u(x) = \ln(2^x + 3^x)$.

Exercice 3 Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, tableau de variations, allure graphique):

1. $f(x) = \ln(e - e^{-1/x})$
2. $g(x) = x^2 \ln |x|$
3. $u(x) = x^2 - x \ln x - 1$