

DS 4 – Mathématiques

Mercredi 13 décembre 2023

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de cinq exercices de mathématiques.

Exercice 1. : Pour tout entier naturel n , déterminer la forme algébrique de : $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^n$

Exercice 2. : Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - x^2 + 1} - \sqrt{e^x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

Exercice 3. :

1. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, calculer le module du complexe : $e^{i\theta} - 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme : $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

3. Dédurre des deux questions précédentes la valeur de la somme : $\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. : On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. (a) Montrer que f est 2-périodique.

(b) Montrer que f est paire.

(c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $]0, 1]$.

on précisera comment récupérer la courbe de f sur son ensemble de définition.

3. Étudier f sur $]0, 1]$.

4. Tracer l'allure graphique de la courbe de f sur $[-1, 4[\setminus\{0, 2\}$.

Exercice 5. : Étudier f sur son ensemble de définition :

$$f(x) = (\sqrt{x})^x$$