DS4 - Corrigé
Mercredi 13 Décembre

Exercice 2

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $(-1+i\sqrt{3})^n=2^n e^{2in\pi/3}=\boxed{2^n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+i\,2^n\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$

Exercice 3

1. $$\sqrt{e^x-x^2+1}-\sqrt{e^x}=\sqrt{e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}-\sqrt{e^x}$$

$$=\sqrt{e^x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}}-1\right) \times \quad \text{F.I } (0\times\infty)$$

donc :

$$\sqrt{e^x-x^2+1}-\sqrt{e^x}=\frac{\cancel{e^x}-x^2+1-\cancel{e^x}}{\sqrt{e^x-x^2+1}+\sqrt{e^x}}=\frac{-x^2+1}{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}}+1\right)}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{e^x}}\;\frac{-1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}}+1}$$

Par C.C, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ et $\frac{x^2}{\sqrt{e^x}}=\sqrt{\frac{x^4}{e^x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ par C.C

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

(2.) $\lim\limits_{x \to -2} x^3 - x^2 + x - 1 = -8 - 4 - 2 - 1 = -15 < 0.$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \quad \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty.}$$

(3.) soit $h = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

donc $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{(h+1)^3 - (h+1)^2 + (h+1) - 1}{(h+1)^2 + (h+1) - 2}$

$$= \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + \cancel{1} - h^2 - 2h - \cancel{1} + h + \cancel{1} - \cancel{1}}{h^2 + 2h + \cancel{1} + h + \cancel{1} - \cancel{2}}$$

$$= \frac{h^3 + 2h^2 + 2h}{h^2 + 3h} = \frac{\cancel{h}(h^2 + 2h + 2)}{\cancel{h}(h+3)}$$

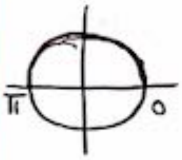
donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{2}{3}}$

Exercice 4

(1.) $e^{i\theta}-1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\, 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

or $0\leq\theta\leq 2\pi$ donc $0\leq\frac{\theta}{2}\leq\pi$



donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\geq 0$.

· si $\theta=0$ ou $\theta=2\pi$: $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=0$ donc $\left|e^{i\theta}-1\right| = 0 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ VRAIE

· si $\theta\in\,]0,2\pi[$, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$ donc $\left|e^{i\theta}-1\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(2.) $\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$

avec $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k \underset{e^{i\frac{\pi}{n}}\neq 1}{=} \frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$

avec $1-e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\pi/2n}} = \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\, e^{-i\frac{\pi}{2n}}$

donc $\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \boxed{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$

(3.) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq k\leq n-1$

$0\leq\frac{2k\pi}{n}\leq\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi$

donc $\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right| \underset{(1)}{=} 2\sin\left(\frac{2k\pi}{2n}\right) = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right| \underset{(2)}{=} \boxed{2\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$

Exercice 5

(1.) $f(x)$ bien défini ssi $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| > 0 \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$

$\iff \frac{\pi}{2}x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \neq 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2k, k \in \mathbb{Z}\}}$

(2.) (a) $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x+2) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\times(x+2)\right)\right|\right)$

$= \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right)\right|\right)$

or $\sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$ donc $|\sin(\pi+\theta)| = |\sin(\theta)|$

donc $f(x+2) = f(x)$ donc <u>f est 2-périodique</u>

(b) $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et : $f(-x) = \ln\left(\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$

$= \ln\left(\left|-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$

$= f(x)$

donc <u>f est paire</u>

(c) . f est 2 périodique donc il suffit de l'étudier sur un "intervalle" d'amplitude 2 : $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

. f est paire donc il suffit de l'étudier sur $]0, 1]$.

. On trace $\mathcal{C}_f$ sur $]0,1]$, puis par symétrie axiale d'axe (O_y), on récupère $\mathcal{C}_f$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$

puis par translation de vecteurs $2k\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$, on récupère toute la courbe sur $\mathcal{D}_f$.

(3.) $\forall x \in]0,1]$, $0 < x \leq 1$

$0 < \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) > 0$

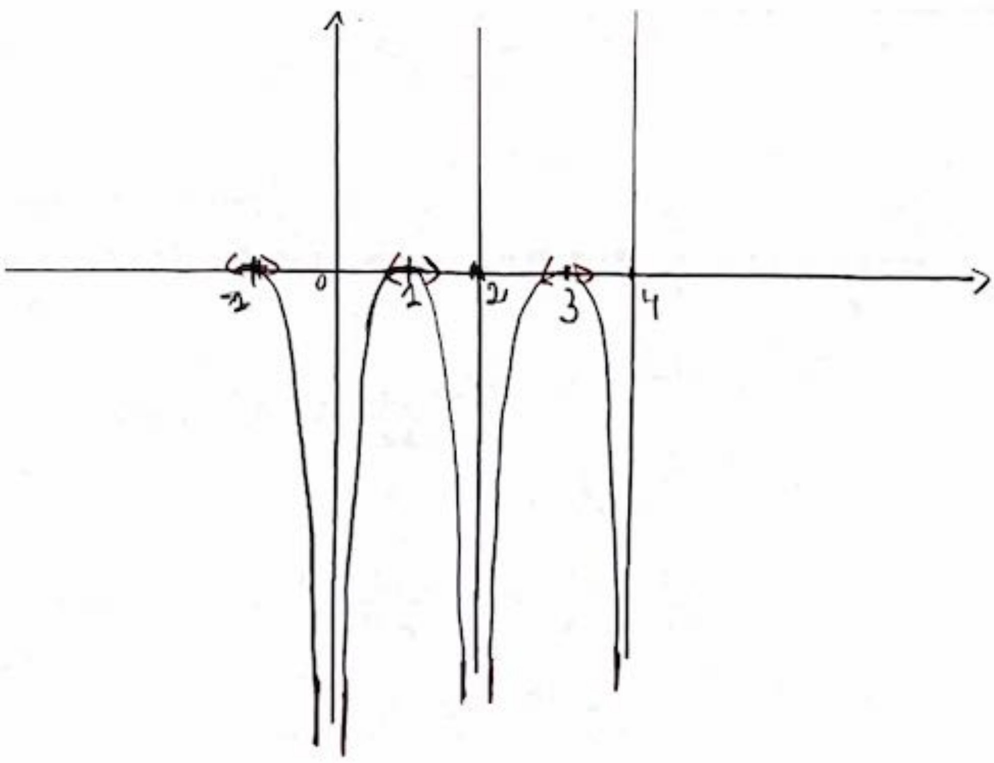
donc $f(x) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$.

f derivable sur $]0,1]$ par composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in]0,1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \times \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

x	0		1
$f'(x)$	||	+	0
f	|| $-\infty$	↗	0

(4.)



Exercice 6. $f(x) = e^{x\ln(\sqrt{x})}$

. $f(x)$ existe ssi $x \geq 0$ et $\sqrt{x} > 0$ donc $\underline{\mathcal{D}_f =]0,+\infty[}$

. f dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ f(x) = e^{x\ln(\sqrt{x})} = e^{\frac{1}{2}x\ln(x)}$

donc $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{2}x\ln(x)}$

$= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x\ln(x)} \left(1 + \ln(x)\right)$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\frac{1}{e^{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

__En 0 :__ par C.C, $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

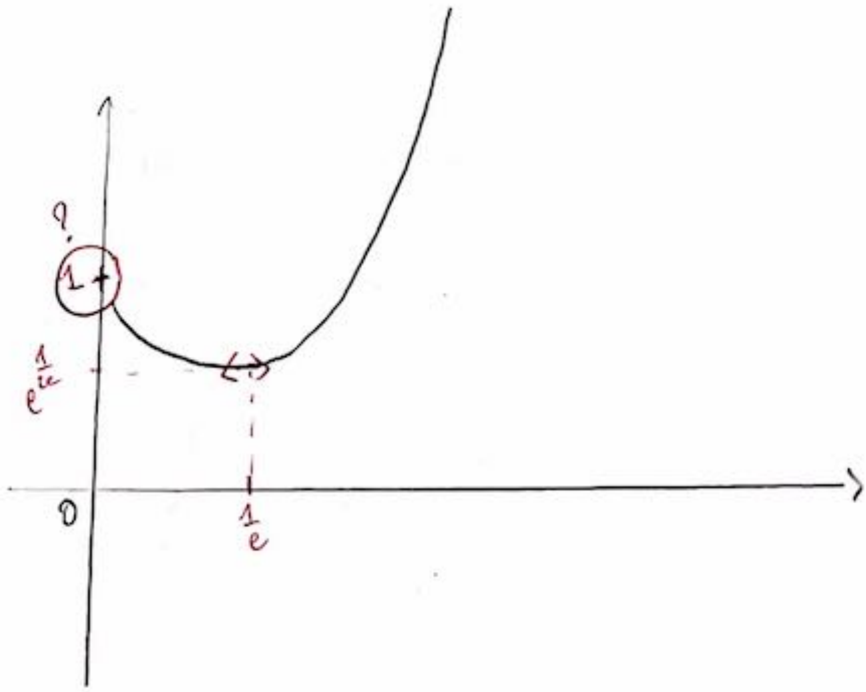
__En $+\infty$:__ $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{2}x\ln(x)}}{x} = \frac{e^{\frac{1}{2}x\ln(x)}}{e^{\ln(x)}} = e^{\frac{1}{2}x\ln(x) - \ln(x)}$

avec $\frac{1}{2}x\ln(x) - \ln(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{2} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

par C.C, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc $\mathcal{C}_f$ __admet une Branche Parabolique verticale__


?
1
$e^{\frac{1}{e}}$
0
$\frac{1}{e}$