DM5 - Corrigé

Exercice 1

. $f(x)$ existe si $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \geqslant 0$ et $x^2-1 \neq 0$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc $\underline{\mathcal{D}_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$

. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x)=f(x)$ donc <u>f est paire</u> et

<u>on l'étudie sur $]1,+\infty[$</u>.

. $\forall x>1$, $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}>0$ donc par composées de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$$\forall x>1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}} \times \left(\frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \times (x^2-1)^2} \left(-2x - 2x \right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \times (x^2-1)^2} \times x < 0.$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1

En 1 ($x > 1$) :

- $\lim\limits_{x \to 1} x^2+1 = 2 > 0$

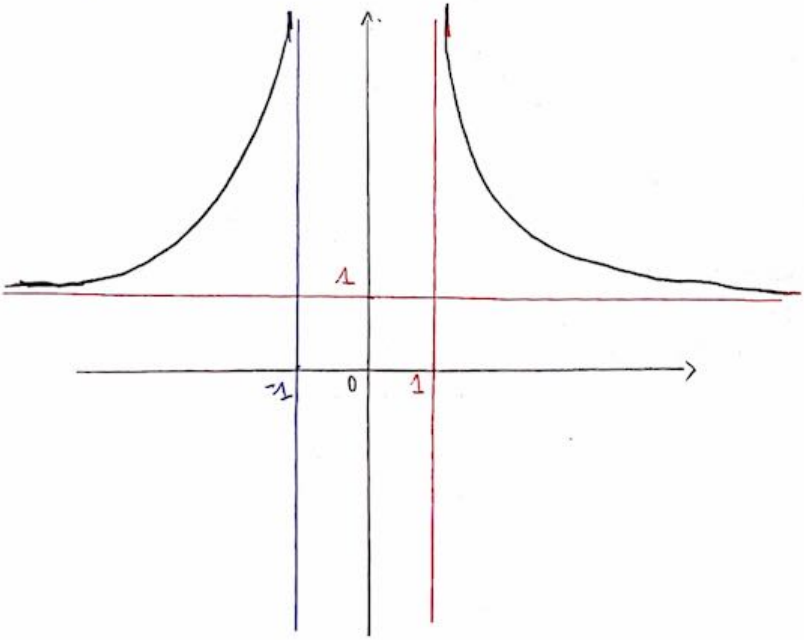
et $x^2-1 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x=1$

En $+\infty$:

- $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = 1$



Exercice 2

· $g(x)$ existe ssi $e^x+e^{-x}>0$ donc $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

· $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $g(-x)=g(x)$ donc g est paire et on l'étudie sur $[0,+\infty[$

· Par composées de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x\geq 0,\quad g'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

· $g'(x)=0 \iff e^x-e^{-x}=0 \iff e^x=e^{-x} \iff x=-x \iff 2x=0 \iff x=0.$

· $g'(x)>0 \iff e^x>e^{-x} \iff x>-x \iff 2x>0 \iff x>0.$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$:

· $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

· $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{\ln(e^x+e^{-x})}{x}=\dfrac{\ln\left(e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right)}{x}$

$$=\frac{\ln(e^x)}{x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$$

$$=1+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$

- $g(x) - x = \ln(e^{x} + e^{-x}) - x = x + \ln(1+e^{-2x}) - x$

$$= \ln(1+e^{-2x}) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

et $\ln(1+e^{-2x}) > 0$
donc $\mathcal{C}_g$ au dessus de son asymptote

donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote oblique : $y = x$