Semaine 13 : 6 au 10 janvier 2025

A. Suites réelles

∗ Suites majorées, minorées, bornées; suites monotones.
∗ **Suites convergentes:** définition ; propriétés ; unicité de la limite.
Note aux colleurs : les sous-suites d'indices pairs et impairs n'ont pas été traitées.
∗ Toute suite convergente est bornée (avec étude de la réciproque)
∗ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et $b<a<c$ alors $b<u_n<c$ APCR (à partir d'un certain rang). (admise)
∗ Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ; si $\ell>0$ alors $u_n>0$ APCR, et $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ APCR; si $\ell<0$ alors $u_n<0$ APCR.
Citation programme officiel: "la définition d'une limite par (ε, n_0) est présentée mais aucune technicité ne pourra être exigée en la matière".
∗ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$.
∗ théorème d'encadrement.
∗ Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée (APCR) alors $(u_n\, v_n)$ converge vers 0.
∗ **sous-suites d'indices pairs et impairs.**
→ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.
A noter (programme officiel): la notion générale de suite extraite est hors-programme.
∗ **Suites monotones:** toute suite croissante et majorée converge; toute suite décroissante et minorée converge; **Suites adjacentes.**
∗ **Suites divergentes**:
∗ Suites qui divergent vers $+\infty/-\infty$: définition; suite divergente: définition.
∗ Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. (APCR suffit)
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$.
si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $-\infty$.
∗ Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$; décroissante et minorée converge; décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.
∗ **Calcul de limite : révisions.** factorisation par le dominant, quantité conjuguée, croissances comparées.
∗ **Suites équivalentes.** définition.
à noter (programme officiel): "on se limite aux suites dont le terme général ne s'annule pas APCR"
→ **Équivalents usuels:** soit (u_n) non nulle APCR et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors: $\forall \alpha\in\mathbb{R}^*$,

$\sin(u_n)\sim u_n \quad \tan(u_n)\sim u_n \quad \cos(u_n)-1\sim -\dfrac{u_n^2}{2}$, $e^{u_n}-1\sim u_n \quad \ln(1+u_n)\sim u_n \quad \sqrt{1+u_n}-1\sim \dfrac{u_n}{2} \quad (1+u_n)^\alpha-1\sim \alpha u_n$,
→ **Opérations:** transitivité, multiplication par un réel non nul, produit, quotient, élévation à une puissance constante.
→ **Applications:** recherche de la limite, recherche de signe (APCR).

B. Suites $u_{n+1}=f(u_n)$ (monotonie)

Les calculatrices sont autorisées afin d'émettre des conjectures sur la monotonie et la convergence / divergence de la suite. Chaque conjecture doit savoir être démontrée. **Chaque élève doit être muni de sa propre calculatrice.**

C. Langage `python`

Calcul du terme de rang n d'une suite récurrente **d'ordre un** ; conjectures sur sa limite et sa monotonie.
Calcul du terme de rang n d'une suite récurrente **d'ordre deux**

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction qui calcule et affiche la valeur de u_n pour tout n : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2\,,\ u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \end{cases}$

   Écrire une fonction`monotonie(n)` qui teste la monotonie de la suite (u_n) jusqu'au rang n.

2. Écrire une fonction qui calcule et affiche la valeur de u_n pour tout n :
   $u_0=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n+2\,e^{u_n}}{1+2\,e^{u_n}}$.

3. Écrire une fonction qui calcule et affiche la valeur de u_n pour tout n :
   $u_0=4$, $u_1=10$, et $\forall n\geqslant 2$, $u_n=\dfrac{1}{n}\,u_{n-1}-\dfrac{n}{2}\,u_{n-2}$.

Puis passage aux exercices.