

Semaine 15 : 22 au 26 janvier 2024

A. Systèmes linéaires avec ou sans paramètres.**B. Calcul matriciel**

* définition, ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$; **Matrices particulières**: ligne, colonne, carrée; triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale, symétrique, antisymétrique; matrice nulle de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$; matrice identité (ou unité) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

* **Opérations matricielles**: égalité, somme, multiplication par un scalaire; règles de calcul.

* **Produit matriciel**: définition, associativité, distributivité, élément neutre: pour tout $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $AI_p = I_n A = A$; produit de deux matrices triangulaires inférieures / supérieures, de deux matrices diagonales.

→ **pièges du produit matriciel**: non commutatif, $AB = O \not\Rightarrow A = O$ ou $B = O$; $AB = AC \not\Rightarrow B = C$, même si $A \neq 0$...

* **Transposition**: définition, règles de calcul.

* **Matrices inversibles**: définition; règles de calcul: $(A^{-1})^{-1} = A$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, A est inversible ssi A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

→ **existence et calcul de l'inverse par un polynôme annulateur**

→ **Déterminant d'une matrice carrée d'ordre deux**: définition; A est inversible ssi $\det A \neq 0$, et dans ce cas, expression de A^{-1} .

Note aux colleurs : les puissances matricielles ne sont pas au programme; le calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de systèmes linéaires n'est pas au programme.

C. Langage Python

Listes : définition en extension ; opérations : concaténation, etc ... ; fonctions **len**, **append**; accès aux éléments d'une liste. Syntaxe $L[-1]$; fonction **remove**

parcours complet sur les éléments / indices d'une liste.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage python) parmi :

1. Écrire une fonction python qui prend en argument une liste de nombres L et qui renvoie une liste avec les termes pairs de L
2. Écrire une fonction python qui prend en argument une liste de nombres L et qui renvoie une liste avec les termes d'indices pairs de L
3. Écrire une fonction **nombre(L, a)** de paramètres L une liste et a une variable, qui renvoie le nombre de a que contient L.

Puis une question de cours parmi :

1. Soient A et B sont deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = O$. Montrer que ni A ni B ne sont inversibles.
2. Montrer l'unicité de l'inverse (quand il existe)
3. $\det A$
4. Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet qu'elle vérifie $M^2 + M - 2I = O$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
5. Montrer que : si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
6. (difficile) Soient $A, E \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, montrer que : $I_p A = A$
7. (difficile) Montrer que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale et : $diag(a_1, \dots, a_n) \times diag(b_1, \dots, b_n) = diag(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$.

Puis passage aux exercices.