DM6 - Corrigé
Vendredi 19 Janvier 2024.

(1.) $f(x)$ bien défini ssi $1-x \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

(2.) f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \neq 1,\quad f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2}\, e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^2}\, e^{\frac{1}{1-x}} > 0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
f	1	↗	$+\infty$ || 0	↗	1

. En 1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

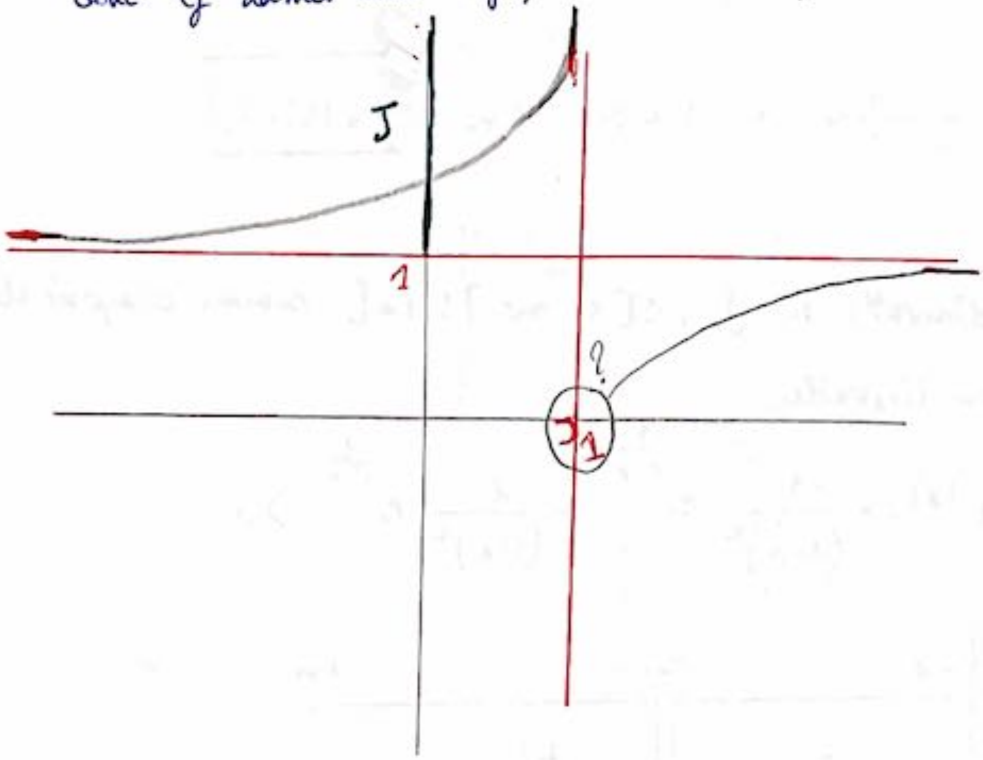
. si $x>1$: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{1-x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 0$

. si $x<1$: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{1-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x=1$

, En ∞ : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = 1$



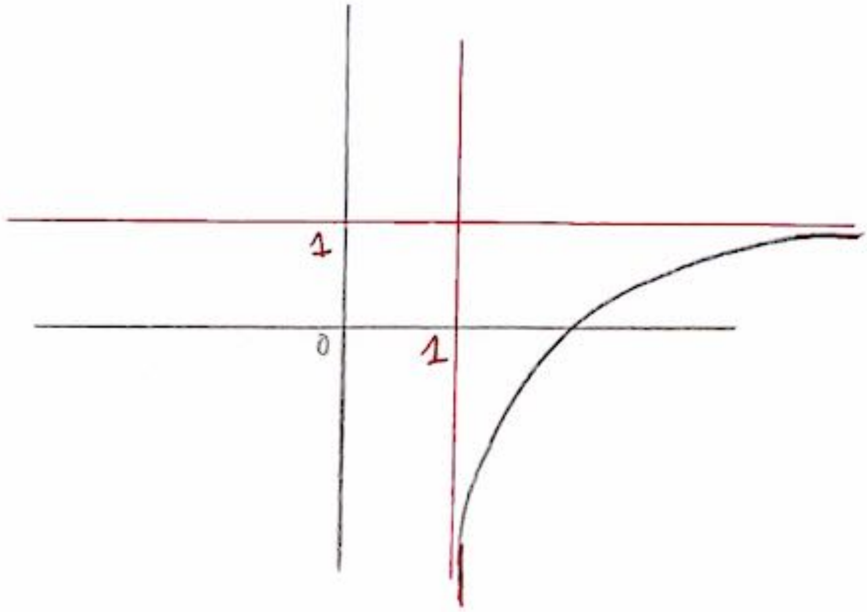
(3.) f est $\nearrow$ sur $]-\infty, 1[$ donc f est injective.
$f(]-\infty, 1[) =]1, +\infty[$ donc f est surjective donc bijective de $]-\infty, 1[$ dans $\boxed{J =]1, +\infty[}$

$$\boxed{\mathcal{D}_{f^{-1}} =]1, +\infty[}$$

(4.)

x	1		$+\infty$
f^{-1}	$-\infty$	$\nearrow$	1

symétrie par rapport à la 1ère bissectrice $y=x$:



(5.)

$\forall y \in]1,+\infty[$, on résout $f(x)=y$ d'inconnue $x \in]-\infty,1[$.

$f(x)=y \iff e^{\frac{1}{1-x}} = y \iff \frac{1}{1-x} = \ln(y)$ car ln injective sur $]0,+\infty[$ et $e^{\frac{1}{1-x}}>0$, $y>1>0$.

$\iff 1-x = \frac{1}{\ln(y)}$ car $y \neq 1$ donc $\ln(y) \neq 0$.

$\iff x = 1-\frac{1}{\ln(y)}$ ($\in]-\infty,1[$ car on sait que f est bijective donc l'équation a une unique solution)

Conclusion :

$$\boxed{f^{-1}(t) = 1-\frac{1}{\ln(t)} \quad \forall t>1}$$