Semaine 16 : 29 janvier au 2 février 2024

A. Systèmes linéaires à paramètres.

B. Calcul matriciel

Voir semaine 15. À rajouter cette semaine :
∗ **Puissances d'une matrice carrée:** définition, notion de matrice nilpotente; cas d'une matrice diagonale.
→ **Calcul de puissances par récurrence (conjecture - polynôme annulateur), binôme de Newton (avec ou sans matrice nilpotente, produits nuls)**
→ **application aux suites matricielles.**
Note aux colleurs : le calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de systèmes linéaires n'est pas au programme de colles.

C. Langage Python

Listes : définition en extension ; opérations : concaténation, etc ... ; fonctions `len`, `append`; accès aux éléments d'une liste. Syntaxe `L[-1]`; fonction `remove`
parcours complet sur les éléments / indices d'une liste.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction `python` qui prend en argument une liste de nombres `L` et qui renvoie une liste avec les termes pairs de `L`
2. Écrire une fonction `python` qui prend en argument une liste de nombres `L` et qui renvoie une liste avec les termes d'indices pairs de `L`
3. Écrire une fonction `nombre(L,a)` de paramètres `L` une liste et `a` une variable, qui renvoie le nombre de `a` que contient `L`.

Puis une question de cours parmi :

1. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ par le binôme de Newton.
2. Calculer les puissances de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence.
3. Soient A et B sont deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = O$. Montrer que ni A ni B ne sont inversibles.
4. Montrer l'unicité de l'inverse (quand il existe)
5. Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet qu' elle vérifie $M^2 + M - 2I = O$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
6. Montrer que : si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}}$
7. (difficile) Soient $A, E \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, montrer que :
$I_pA = A$
8. (difficile) Montrer que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale et:
$diag(a_1, \dots, a_n) \times diag(b_1, \dots, b_n) = diag(a_1\,b_1, \dots, a_n\,b_n)$.
9. (difficile) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$; $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)^p = \mathrm{diag}(a_1^p, \dots, a_n^p)$.

Puis passage aux exercices.