

Devoir Maison 7

À rendre lundi 5 février 2024

Exercice 1 :

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel t la matrice suivante est-elle inversible? Dans ce cas, déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} .
2. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} x & & - & z & = & m \\ -2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2m \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 (facultatif)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), telle que : il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = O_n$.

1. Calculer le produit : $(I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$
2. En déduire que $(I_n - A)$ est inversible et donner son inverse.