Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 5 – Mathématiques

Mercredi 24 Janvier 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de trois exercices de mathématiques et d'un exercice d'informatique.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1. : (langage `Python`)

1. Écrire une fonction `test(L,a)` qui prend en arguments une liste `L` de nombres de longueur supérieure à 3 et un réel `a`, et qui renvoie :
   - `True` si `a` est le deuxième élément `L`,
   - `False` sinon.
2. Soit la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = -2\, u_{n-1} + 3$$
   Écrire une fonction `Termes(n)` qui renvoie une **liste** contenant tous les termes u_k, k allant de 0 à n.
3. Soit la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n^2+1}$.
   Écrire une fonction `Pairs(n)` qui renvoie une **liste** contenant les termes d'indice pairs entre 0 et $2n$.
4. Écrire une fonction `Remplace(L)`, d'argument une liste de nombres `L`, et qui renvoie une liste où tous les éléments strictement négatifs de `L` sont remplacés par 0.
   on fera un parcours de liste sur les indices

Exercice 2. : On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\,\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Montrer que f est 2π-périodique.
   (b) Montrer que f est paire.
   (c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.
   on précisera comment récupérer la courbe de f sur son ensemble de définition.
3. Étudier f sur $[0,\pi]$.
4. Tracer l'allure graphique de la courbe de f sur $[-\pi,\pi]$.
5. Montrer que f est bijective de $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ dans un intervalle J à déterminer.

   On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Quel est son ensemble de définition ?

6. Donner le tableau de variations de f^{-1} et une allure graphique de sa courbe représentative.
7. Pour tout $t \in J$, déterminer son expression $f^{-1}(t)$.

Exercice 3. : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} (3-\lambda)\,x & - & y & - & z & = 0 \\ & & 2\lambda\,y & + & 2z & = 0 \\ -x & + & y & + & (3-\lambda)\,z & = 0 \end{array} \right.$$

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système n'est pas de rang 3.
Dans ce cas, résoudre le système.

Exercice 4. : On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice pseudo - stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de A est égale à 1.

1. Dans cette question, on prend $n = 2$.
   (a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle pseudo - stochastique ? Et la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$?
   (b) Montrer que le produit de deux pseudo - matrices carrées d'ordre deux stochastiques est pseudo - stochastique.
2. Dans cette question, on prend $n = 3$.
   (a) Proposer deux matrices carrées d'ordre trois non diagonales, l'une pseudo - stochastique et l'autre non pseudo - stochastique.
   (b) Montrer que I_3 est la seule matrice carrée d'ordre trois diagonale pseudo - stochastique.
3. Dans cette question, $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
   (a) Que peut-on dire de A^T ? Justifier votre réponse.
   (b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices pseudo - stochastiques. Montrer que le produit AB est pseudo - stochastique.