DS5 _ Corrigé
Mercredi 24 Janvier 2024

Exercice 2

(1.) $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{4} + \left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

(2.)

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$ car cos est 2π-périodique

donc f est 2π-périodique

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$ car cos est paire

donc f est paire.

(c) . f est 2π-périodique donc il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π : $[-\pi, \pi]$.

. f est paire donc il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.

Par symétrie axiale % (Oy), on récupère $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, \pi]$,

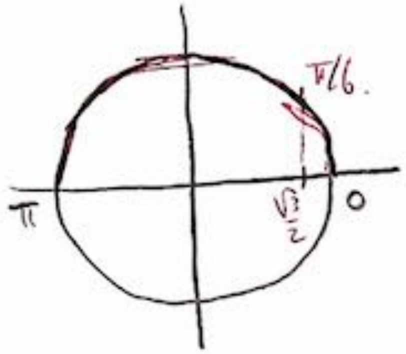
puis par translations de vecteur $2\pi k\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$, on récupère $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$

(3.) $\forall x \in [0, \pi],\ \frac{1}{4} + \left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2 > 0$ donc f dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{1}{4} + (2\cos x - \sqrt{3})^2}} \times \cancel{2}\left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)(-2\sin x)$$

- $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \iff \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}.$



- $2\cos(x) - \sqrt{3} > 0 \iff \cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 0 < x < \frac{\pi}{6}.$

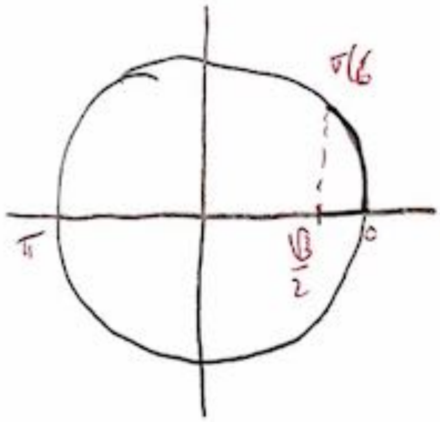
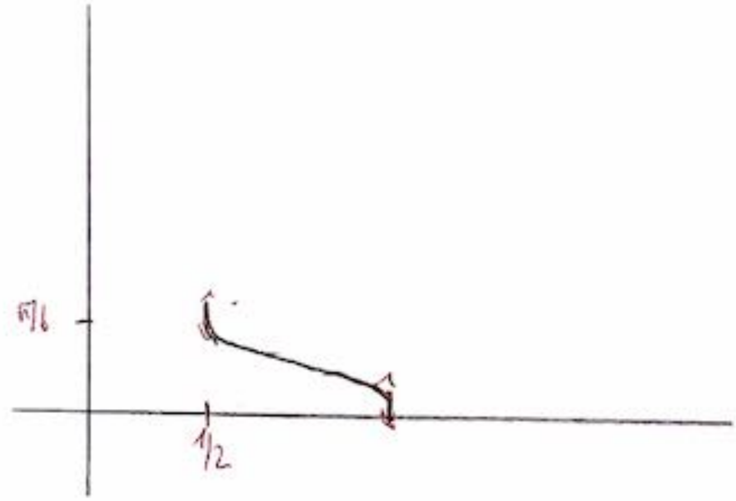


Tableau de variations:

x	0		$\pi/6$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$2\cos(x)-\sqrt{3}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	α	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	β.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{\frac{29}{4} - 4\sqrt{3}}. = \alpha$$



(7.) $\forall y \in \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$, on résout $f(x) = y$ sur $[0, \pi/6]$

$f(x) = y \iff \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2} = y$

$\iff \frac{1}{4} + \left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2 = y$ car $(x \mapsto x^2)$ injective sur $\mathbb{R}_+$
et $y \geqslant 0$
$\sqrt{\frac{1}{4} + (2\cos(x) - \sqrt{3})} \geqslant 0$.

$\iff \left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2 = y - \frac{1}{4}$.

or $y \geqslant \frac{1}{2}$ donc $y - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4} \geqslant 0$

donc $f(x) = y \iff \left|2\cos(x) - \sqrt{3}\right| = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$ car $(x \mapsto \sqrt{x})$ bijective sur $\mathbb{R}_+$
et $y - \frac{1}{4} \geqslant 0$
$\left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2 \geqslant 0$.

or $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $2\cos(x) - \sqrt{3} \geqslant 0$.

donc $f(x) = y \iff \cos(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{y - \frac{1}{4}}\right) \in [-1, 1]$ car l'équation a une solution.

$\iff x = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{y - \frac{1}{4}}\right)\right) \in [0, \pi/6]$ car on sait que l'équation a une unique solution par bijection.

Conclusion :

$$\boxed{f^{-1}(t) = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{t-\frac{1}{4}}\right)\right) \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]}.$$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} -x + y + (3-\lambda)z = 0. \\ 2\lambda y + 2z = 0. \\ (3-\lambda)x - y - z = 0. \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}}{\iff} \begin{cases} (-1)x + y + (3-\lambda)z = 0. \\ \lambda y + z = 0. \\ (2-\lambda)y + (2-\lambda)(4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} (-1)x + y + (3-\lambda)z = 0. \\ 2y + [(2-\lambda)(4-\lambda)+1]z = 0. \\ (2-\lambda)y + (2-\lambda)(4-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - (2-\lambda)L_2}{\iff} \begin{cases} (-1)x + y + (3-\lambda)z = 0. \\ 2y + [(2-\lambda)(4-\lambda)+1]z = 0. \\ P(\lambda)\, z = 0. \end{cases}$$

avec $P(\lambda) = 2(2-\lambda)(4-\lambda) - (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda)+1\right]$.

$= (2-\lambda)\left[2(4-\lambda) - 1 - (2-\lambda)(4-\lambda)\right].$

$= (2-\lambda)\left[(4-\lambda)(\cancel{2}-\cancel{2}+\lambda) - 1\right] = (2-\lambda)\left(-\lambda^2+4\lambda-1\right)$

$= (\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+1\right)$

$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2$ ou $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$.

$$\Delta = 16 - 4 = 12 > 0.$$

$$\lambda = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } \lambda = 2 + \sqrt{3}.$$

Conclusion: $\boxed{\text{rg}(S) \neq 3 \iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 2\sqrt{3} \text{ ou } \lambda = 2 + \sqrt{3}.}$

* si $\lambda = 2$

$$(S) \iff \begin{cases} ① \; x + y + z = 0 \\ ② \; y + z = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y + z = y - 2y = -y. \\ z = -2y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{(-y, y, -2y), y \in \mathbb{R}\}.}$$

• si $\lambda = 2 - \sqrt{3}$:

$$(S) \iff \begin{cases} ① \; x + y + (1+\sqrt{3})z = 0. \\ ② \; y + \underbrace{(4 + 2\sqrt{3})}_{2(2+\sqrt{3})} z = 0. \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y + (1+\sqrt{3})z = (2+\sqrt{3})z + (1+\sqrt{3})z = (3 + 2\sqrt{3})z \\ y = (2+\sqrt{3})z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{((3+2\sqrt{3})z, (2+\sqrt{3})z, z), z \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda = 2+\sqrt{3}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (1-\sqrt{3})z = 0. \\ 2y + 2(2-\sqrt{3})z = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + (1-\sqrt{3})z = (2-\sqrt{3})z + (1-\sqrt{3})z = (3-2\sqrt{3})z \\ y = (2-\sqrt{3})z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{Y} = \left\{ \left((3-2\sqrt{3})z, (2-\sqrt{3})z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Exercice 4

1. (a) · $\left.\begin{array}{l} C_1 : 1+0=1 \\ C_2 : -1+2=1 \end{array}\right\}$ donc A est pseudo-stochastique.

· $\left.\begin{array}{l} C_1 : -4+5=1 \\ -1+1=0 \neq 1 \end{array}\right\}$ donc A n'est pas pseudo-stochastique.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ stochastique : $\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=1 \end{cases}$

et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ stochastique : $\begin{cases} e+g=1 \\ f+h=1 \end{cases}$

$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ avec :

$\bullet\ (ae+bg)+(ce+dg) = e\underbrace{(a+c)}_{=1} + g\underbrace{(b+d)}_{=1} = e+g = 1$

et $\bullet\ (af+bh)+(cf+dh) = f(a+c) + h(b+d) = f+h = 1$

donc <u>AB est pseudo-stochastique</u>.

(2.) <u>$n=3$.</u>

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est pseudo-stochastique

mais $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas pseudo-stochastique

(b) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est stochastique ssi $\begin{cases} a+0+0 = 1 \\ 0+b+0 = 1 \\ 0+0+c = 1 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

ssi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. V

(3.)

(a) la somme des coefficients sur chaque ligne de A^T est égale à 1

En effet : $\forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} [A]_{ij} = 1.$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^{n} [A^T]_{ji} = 1.$$

(b) $\forall i,j \in [\![1,n]\!].$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [AB]_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} [A]_{ik}}_{\text{somme des coeff de la colonne } k \text{ de } A} \Bigg) [B]_{kj} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1 \times [B]_{kj}}_{\text{somme des coeff de la colonne } j \text{ de } B} = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion : AB est pseudo-stochastique