DM7_ Corrigé
lundi 5 Février 2024

Exercice 1

$\forall\, Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose le système $AX = Y$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

· Matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & a \\ 0 & 1 & -2t & b-2a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & a \\ 0 & 1 & -2t & -2a+b \\ 0 & 0 & 1+2t & -2a+b+c \end{array}\right)$$

$$\boxed{A \text{ est inversible ssi } 1+2t \neq 0}$$

$\forall\, t \neq -\frac{1}{2}$, $\quad AX = Y \iff \begin{cases} x \quad + tz = a \\ y - 2tz = -2a+b \\ (1+2t)z = 2a-b+c \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = a - tz = \left(1 - \frac{2t}{1+2t}\right)a + \frac{t}{1+2t}b - \frac{t}{1+2t}c = \frac{1}{1+2t}a + \frac{t}{1+2t}b - \frac{t}{1+2t}c \\ y = -2a+b+2tz = \left(-2 + \frac{4t}{1+2t}\right)a + \left(1 - \frac{2t}{1+2t}\right)b + \left(\frac{2t}{1+2t}\right)c \\ z = \frac{2}{1+2t}a - \frac{1}{1+2t}b + \frac{1}{1+2t}c \;\Big|\; = \frac{-2}{1+2t}a + \frac{1}{1+2t}b + \frac{2t}{1+2t}c \end{cases}$$

Conclusion :
$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{1+2t}\begin{pmatrix}1 & t & -t\\ -2 & 1 & 2t\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$

Exercice 2

1. $\forall Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose le système $MX=Y$, où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$MX=Y \iff \begin{cases} x \quad\quad - z = a\\ -2x+3y+4z=b\\ \quad y+z=c\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+2L_1}{\iff} \begin{cases} x \quad\quad - z = a\\ 3y+2z = 2a+b\\ y+z=c\end{cases} \underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x \quad\quad - z = a\\ y+z=c\\ 3y+2z=2a+b.\end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\iff} \begin{cases} x \quad\quad - z = a\\ y+z=c\\ -z=2a+b-3c\end{cases}$$

le rang du système est 3 donc il est de Cramer donc

$\boxed{M \text{ est inversible}}$

$$MX=Y \iff \begin{cases} x=a+z=-a-b+3c\\ y=c-z=2a+b-2c\\ z=-2a-b+3c\end{cases}$$

Conclusion :
$$\boxed{M^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}}$$

(2.) On reprend la question (1) avec $\begin{cases} a = n \\ b = 1 \\ c = 2n \end{cases}$ car Ω est la matrice associée au système

bonne méthode !

donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -n - 1 + 6n = 5n - 1 \\ y = 2n + 1 - 4n = -2n + 1 \\ z = -2n - 1 + 6n = 4n - 1 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{S = \{(5n-1, -2n+1, 4n-1)\}}$.

Exercice 3

(1.) $$(I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) - A \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=1}^{p} A^k$$
$$= A^0 - A^p = I_n - \underbrace{A^p}_{= 0_n} = \boxed{I_n}$$

(2.) Notons la matrice $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

On a alors $(I_n - A) B = I_n$. De même, $B(I_n - A) = I_n$.

Conclusion. $\boxed{(I_n - A) \text{ est inversible et } (I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k}$